普通高等院校大学数学“十三五”规划教材

高等数学试题集

北京邮电大学数学系　编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

《高等数学试题集》由北京邮电大学数学系教师编写。本试题集在注重考查学生的基本概念、基本方法和基本思想的前提下，加强了广度和深度，以适合不同层次的学生使用。

北京邮电大学的“高等数学”教学分为多个层次，本书按照“数学分析”、“高等数学 A”、“高等数学 B”三个不同的层次将内容分成三篇，每篇按照上册期中、上册期末、下册期中、下册期末分成了四部分。全书整理了近些年来北京邮电大学“数学分析”、“高等数学 A”、“高等数学 B”的期中和期末考试的真题，并给出了参考答案。

本试题集可供高等院校理工科非数学专业的学生巩固练习所用，也可作为考研辅导参考书，或作为教师的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学试题集 / 北京邮电大学数学系编. —北京：电子工业出版社，2016.8

ISBN 978-7-121-29432-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①北… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－习题集 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 167833 号

策划编辑：赵玉山

责任编辑：赵玉山　　特约编辑：邹小丽

印　　刷：

装　　订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036

开　　本：787×980　1/16　印张：20　字数：474 千字

版　　次：2016 年 8 月第 1 版

印　　次：2016 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：45.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254556，zhaoys@phei.com.cn。

前言

<<<<< PREFACE

“高等数学”是高等理工科院校最重要的基础课程之一，它最重要的任务是使学生除了具备学习后继课程所需要的数学知识外，还应该领悟到其中重要的数学思想，提高学生应用数学工具解决实际问题的能力。

学习数学课程的一个必要环节是练习巩固。练习是掌握知识、形成技能、发展智力、挖掘创新潜能的重要手段，是教师了解学生知识掌握情况的主要途径，高质量的课堂教学必须有较高的练习质量做基础。因此，有效练习在数学教学中有着特别重要的地位，必须精心设计。

练习在数学教学中显得越来越突出，同时大家注意到考试题目是最精炼的，是经过教师精心设计的。为了满足广大同学和任课教师的需求，基于以上考虑，我们将北京邮电大学近年来的期中、期末考试题目进行了整理，编写了这本《高等数学试题集》。

本书包含了工科数学分析，高等数学 A，高等数学 B 的考试题目。其中高等数学 A 适用于计算机、电子、自动化等专业的工科学生，高等数学 B 适用于管理类的学生。

本书主要由北京邮电大学数学系默会霞，刘吉佑，丁金扣，刘宝生，李鹤老师组织编写，另外，北京邮电大学数学系老师单文锐，陈秀卿，马利文，李亚杰老师也参与了部分内容的编写。北京邮电大学教务处对本书的编写给予了大力支持，再次我们表示衷心的感谢。

编　者

2016 年 7 月

目录

<<<<< CONTENTS

第一篇　数学分析

一、“数学分析（上）”期中试题

“数学分析（上）”期中试题 1

1．曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)\ (x>0)$ 的斜渐近线方程为________________.

2．设 $p(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$，则 $p(x)=$________________.

3．设 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，$(x\neq 0, a^2\neq b^2)$，则 $f(x)$ 的表达式为____________________.

4．设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 和 $g(x)=bx^2+c$ 都经过点 $(-1,0)$，且在此点有公切线，则 $a=$_______，$b=$________，$c=$________.

5．设方程 $xy^2+\mathrm{e}^y=\cos(x+y^2)$，确定了隐函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______________________.

6．设 $x=\varphi(y)$ 是单调连续函数 $y=f(x)$ 的反函数，且 $f(2)=4$，$f'(2)=3$，则 $\varphi'(4)=$________.

7．已知当 $x\to 0$ 时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $\alpha=$________.

8．若函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

9．$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$ 的_________间断点.

10．曲线 $\rho=a\sin 3\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 所对应点处的切线方程为________________.

11．设 $f'(a)=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$______________.

12．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}=$__________________________.

13．极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{7x-5}-\sqrt{3x+7}}{x^2-5x+6}=$__________________________.

14．极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=$______________________________.

15．极限 $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}(\tan x)^{\tan 2x}=$______________________________.

16．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\ln(1+x)}=$______________________________.

17．对任意 $x>-1$，由微分中值定理，存在 $\theta\in(0,1)$ 使得 $\ln(1+x)=\dfrac{x}{1+\theta x}$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$________.

18．设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$______________________________.

19．函数 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极大值为________，极小值为________.

20．函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ 在区间 $[0,4]$ 上的最大值为________，最小值为________.

“数学分析（上）”期中试题 1 参考答案

1． $y=x+\dfrac{1}{e}$；2． x^3+2x^2+x；3． $f(x)=\dfrac{1}{(a^2-b^2)}\left(\dfrac{ac}{x}-bcx\right)$；

4． $a=-1,b=-1,c=1$；5． $-\dfrac{y^2+\sin(x+y^2)}{2xy+e^y+2y\sin(x+y^2)}$ ；

6． $\dfrac{1}{3}$；7． $\alpha=-\dfrac{3}{2}$；8． $e^{-\frac{1}{2}}$；9．第一类跳跃；

10． $y-\dfrac{a}{2}=-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$；11． $f(a)-af'(a)=f(a)-ab$；

12． $\dfrac{5}{3}$；13． $\dfrac{1}{2}$；14． $-\dfrac{1}{2}$；15． e^{-1}；16． $\dfrac{1}{2}$；17． $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$；

18．$f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{2n!}{(1+x)^{n+1}}$；19．$f(e^2)=\dfrac{4}{e^2}$，$f(1)=0$；20．$\dfrac{3}{5}$，$-1$.

“数学分析（上）”期中试题 2

1．设对一切实数 x 和 y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且 $f(\sqrt{2})=1$，则 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$________.

2．设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$，其中函数 $f(x)$ 具有连续的导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=b$．若函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$________.

3．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{nx}{nx^2+1}\right)$ 的间断点是________，且是________类间断点.

4．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\ln\arctan\left(2x^2\right)-\ln(1-\cos x)\right]=$________________.

5．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$________________.

6．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)=$________________.

7．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)^x=$________________.

8．当 $x\to 0$ 时 $\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量，则 $k=$________.

9．设 $a>b>0$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$________________.

10．曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为______________________________.

11．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ ax-1, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$________.

12．函数 $f(x)=\dfrac{3-x^2}{3}$，在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 $\xi=$________.

13．设 $f(x)=\dfrac{2x}{2x+1}$，则 $f^{(n)}(x)=$________________________.

14．设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$________________.

15．设 $y=(1+\sin x)^{x}$， 则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$__________________________.

16．设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $f'(1)=$___________________.

17．椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 所对应点处的切线方程为 _______________________.

18．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=3t^{2}+2t+3\\ \mathrm{e}^{y}\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

19．设 $x\geqslant 0$，则 $\ln(1+x)$ ________ $\dfrac{\arctan x}{1+x}$ (填写 $>,\geqslant,<$ 或 $\leqslant$).

20．函数 $y=(x^{2}-1)^{3}+1$ 的极值点为________.

“数学分析（上）”期中试题 2 参考答案

1．$\dfrac{1}{2}$；2．$a+b$；3．$x=0$，第二类无穷；4．$\ln 4$；5．$\dfrac{1}{2}$；6．1；7．1；8．$\dfrac{3}{4}$；9．a；

10．$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$；11．$a=2$；12．$\dfrac{1}{2}$；13．$(-1)^{n+1}2^{n}n!(2x+1)^{-1-n}$；14．$n!$；

15．$(1+\sin x)^{x}\left[\ln(1+\sin x)+\dfrac{x\cos x}{1+\sin x}\right]_{\pi}=-\pi$；

16．2；17．$y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=-\dfrac{b}{a}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$；18．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^{y}\cos t}{2(3t+1)(1-\mathrm{e}^{y}\sin t)}$；

19．$\geqslant$；20．0.

“数学分析（上）”期中试题 3

1．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^{2}+1}=$____________________________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^{2}}=$________________________________.

3．设 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin\pi x}$，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{1-x}=$________________.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-x\mathrm{e}^{tx}}{x+\mathrm{e}^{tx}}$, 则 $f(x)=$________，$f(x)$ 的间断点是________，且是________间断点.

5．设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，$f(x)=4x^2+\dfrac{\arcsin 2(x-1)}{\sin(\sin(x-1))}+2\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=$__________.

6．极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=$______________.

7．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3^x+9^x\right)^{\frac{1}{x}}=$________________.

8．设当 $x\to0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^3)=o(x^n\sin x)$，且 $x^n\sin x=o(\mathrm{e}^{x\tan^2 x}-1)$，则正整数 $n=$________.

9．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$__________________.

10．曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$, $(x>0)$ 的斜渐近线方程为__________________.

11．如果函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x\leqslant0\\ b(1-x^2), & x>0\end{cases}$ 处处可导，则 $a=$________，$b=$________.

12．函数 $f(x)=x-\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 $\xi=$________.

13．设　$y=(x^3+2)\cos 2x$，则 $y^{(10)}(0)$　=　______________.

14．当 $x\to0$ 时，函数 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$ 是 x 的________阶无穷小量.

15．设 $x>1$, 比较 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$ 与 $\dfrac{x}{1+x}$ 的大小:__________________.

16．设 $g'(x)$ 连续，且 $f(x)=(x-a)^2g(x)$, 则 $f''(a)=$________________.

17．曲线 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}=0$ 在点 $N_0(0,1)$ 的切线方程为__________________.

18．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0\end{cases}$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$__________.

19．曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点是________________.

20．函数 $y=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是________________.

"数学分析（上）"期中试题 3 参考答案

1． 2； 2． $-\dfrac{9}{32}$； 3． $-\pi$；

4． $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ -x, & x>0\end{cases}$， $x=0$，第二类无穷；

5． -6； 6． 1； 7． 9； 8． 3； 9． 1； 10． $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$； 11． $a=0,b=1$；

12． $\xi=\dfrac{1}{\ln 2}-1$； 13． -2^{11}； 14． $\dfrac{1}{3}$； 15． $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$；

16． $2g(a)$； 17． $y-1=\dfrac{-1}{\mathrm{e}}(x-0)$； 18． $\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{e}^y\cos t}{2(3t+1)(1-\mathrm{e}^y\sin t)}\mathrm{d}x$；

19． $(0,1),\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27}\right)$； 20． $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.

"数学分析（上）"期中试题 4

1．已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=$________.

2．设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

3．若 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x^4)\right]=\dfrac{1}{x}$, 则 $f'(x)=$________.

4．若函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷型间断点 $x=0$, 有可去间断点 $x=1$, 则 $a=$________， $b=$________.

5．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$________.

6．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+\sin\left(\sqrt{n^2+1}\right)}{(n+1)^2}=$________.

7．设 $a_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}=$________

8．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=$________.

9．若当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=\ln(1+kx^2)$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小量，则 $k=$________.

10．设 $0<x_n<1, n=1,2,\cdots$，且有 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在？________.

11．曲线 $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$ 的渐近线方程为________________________.

12．已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+bx+c}{1-x}=5$，则 b=________，c=________.

13．函数 $f(x)=x^2$ 及 $g(x)=x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理的点 $\xi=$________.

14．设函数 $f(x)$ 处处可导，且有 $f'(0)=1$，并对任何实数 x 和 h，恒有 $f(x+h)=f(x)+f(h)+2hx$，则 $f'(x)=$________________.

15．设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$__________________.

16．设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 不存在的最小正整数 n 为________.

17．若函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 所确定，则 $y'=$________.

18．设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______________________.

19．设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\sin x+\tan x$ ________ $2x$.（填写 $>,\geqslant,<$ 或 $\leqslant$）.

20．函数 $y=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是________.

“数学分析（上）”期中试题 4 参考答案

1． $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$；2．24；3． $\dfrac{1}{4x}$；4． $a=0$，$b=\mathrm{e}$；

5． $\dfrac{1}{2}$；6． 2；7． $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$；8． e^2；9． $\dfrac{3}{4}$；10．存在；

11． $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}},y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；12． $b=-7,c=6$；13． $\dfrac{2}{3}$；14． $2x+1$；

15． $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{2n!}{(1+x)^{n+1}}$；16． 3；17． $\dfrac{y^2-\mathrm{e}^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$；

18． $\dfrac{\dfrac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2}}{2t}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$；19． $>$；20． $\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$．

“数学分析（上）”期中试题 5

1． $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 的“$M-\delta$”语言为________________________.

2．函数 $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ 在 $x=1$ 处带佩亚诺余项的二阶泰勒公式是____________.

3．作为一元微分学的基本工具，泰勒公式的基本思想是________________.

4．数列 $\{x_n\}$ 的柯西收敛原理是____________________________.

5．曲线 $y=\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 上过点________的切线垂直于直线 $y=-2x+1$.

6．函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处最多存在________阶导数.

7．极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan x)^{2\cot x}=$________.

8．已知 $a_n=\sqrt{8+\sqrt{8+\cdots+\sqrt{8}}}$（$n$ 重根号）且极限存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$________.

9．若当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\sin x}$ 与 x^α 是同阶无穷小量，则 $\alpha=$________.

10．函数 $y=x^2-\ln x$ 的单减区间为________.

11．函数 $y=\sin(2x+1)$ 在点 $x=0$ 的微分是__________________.

12．已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2000}}{(x-1)^{\alpha}-x^{\alpha}}=\beta\neq 0$，则 $\alpha=$________，$\beta=$________.

13．极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)}=$________.

14．已知 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，则 $f^{(100)}(0)=$________，$f^{(101)}(0)=$________.

15．已知 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，则 $y'=$ ________.

16．设 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

17．设 $f(x)=\begin{cases}x^2+\ln(1+x), & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 $a=$________，$b=$________.

18．若函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 n 应满足________.

19．若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则当 $\Delta x\to 0$ 时（　　）.

（A）$\mathrm{d}y$ 是 Δx 的等价无穷小；　　（B）$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是 Δx 的高价无穷小；

（C）$\mathrm{d}y$ 是 Δx 的高价无穷小；　　（D）$\Delta y-\mathrm{d}y$ 是 Δx 的同价无穷小.

20．长方形的面积一定，则长与宽的比为何值时周长最小？________.

“数学分析（上）”期中试题 5 参考答案

1．$\forall M>0,\exists\delta>0$, 当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时, $|f(x)|>M$；

2．$f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}(x-1)+\dfrac{1}{2^3}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$；

3．用多项式逼近函数；

4．数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，存在 $N\in N_+$，使得 $m,n>N$ 时，恒有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$；

5．$(0,\ln 2)$；6．无穷多；7．e^6；8．$\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$；9．$\alpha=3$；

10．$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$；11．$\mathrm{d}y=2\cos 1\mathrm{d}x$；12．2001，$-\dfrac{1}{2001}$；13．0；

14. $f^{(100)}(0)=-\dfrac{100!}{49!}\dfrac{1}{2^{49}}$， $f^{(101)}(0)=0$；

15. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$ ；16. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}$；

17. $a=1,b=0$；18. $n>1$；19. B；20. 1.

“数学分析（上）”期中试题 6

1. x=0 是函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的________间断点（可去、跳跃、无穷等）.

2. 设 $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$，则 $y'=$________.

3. 设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}=$________.

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x+\ln x}}=$________.

5. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3+\sin x}{1+10^{\frac{1}{x}}}=$________.

6. 设 $f(x)=e^{x^{100}}$，则 $f^{(200)}(0)=$________.

7. 函数 $f(x)=\tan x$ 带 peano 余项的麦克劳林展开式为（到含 x^5 项）________.

8. 设 $f(0)\neq 0$， $f'(0)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(0)}\right]^x=$________.

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内________.

（A）处处可导；（B）正好有一个不可导点；

（C）正好有两个不可导点；（D）至少有三个不可导点.

10. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则在该点的微分 $dy=$________，该微分式的几何意义是________.

11．设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=g(x),h(x)=x^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(h(x))=$__________.

12．设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$，则 $f^{(28)}(\pi)=$__________.

13．已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^m}=a\neq 0$，则 $m=$_________，$a=$_________.

14．设 $\sqrt{x^2+y^2}=2\mathrm{e}^{\arctan\frac{y}{x}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$____________________.（化简结果）

15．若 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}[f(x^4)]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=$__________.

16．小王将本金 A_0 元存入银行，年利率是 r.若将一年分成 n 个时间单元，按单元复利计算，一年后小王得到的本息 $A_n=$__________，$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$__________ .

17．对定义在 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 叙述微分（拉格朗日）中值定理.

18．若 $f'(x_0)$ 存在，则存在 x_0 的某个邻域，使得 $f(x)$ 在该邻域上连续. 这段叙述是否成立？__________.

19．设 ξ 为函数 $f(x)=\arcsin x$ 在区间 $[a,b]$ 上使用拉格朗日中值定理中的“中值”，$b>0$，则 $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{\xi}{b}$__________.

20．设 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=4$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$_________.（写出详细求解过程）

“数学分析（上）”期中试题 6 参考答案

1．可去；2． $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$；3． $\sqrt{2}$；4． $\dfrac{\pi}{4}$；5．不存在；

6． $\dfrac{1}{2}200!$；7． $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{16}{5}x^5+o(x^5)$；8． $\mathrm{e}^{\frac{f'(0)}{f(0)}}$；9．C

10． $f'(x_0)\mathrm{d}x$，它表示函数在点 $\left(x_{0,}f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线上的函数改变量；

11． $2xg(x^2)$；12． $\dfrac{1}{2^{28}}+2^{28}$；13．3, $-\dfrac{4}{3}$；14． $\dfrac{x+y}{x-y}$；

15．$\dfrac{1}{4x}$；16．$A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^n$，$A_0 e^r$；17．略；18．不成立；

19．$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$；

20．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\dfrac{1}{2}f''(0)=2$.注：只能用一次洛必达法则.

二、"数学分析（上）"期末试题

"数学分析（上）"期末试题 1

一、填空

1．若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则 $a=$__________，$b=$__________.

2．$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)=$__________.

3．设 $f'(\sin^2 x)=\tan^2 x$，则 $f(x)=$__________.

4．曲线 $\begin{cases} x=e^t\sin 2t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为__________.

5．$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$__________.

6．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)dx=$__________.

7．$\int\dfrac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=$__________.

8．$\int_{-2}^{2}\max\{1,\ x^2\}dx=$__________.

9．$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=$__________.

10．已知 $y_1=x, y_2=x+e^x$，$y_3=1+x+e^x$ 为某二阶线性非齐次常系数微分方程的解，则此方程的通解为__________.

二、设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$．又知该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的面积（$x\leqslant 1$ 部分）为 $\dfrac{1}{3}$，求 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

三、设 $f(x)$ 是一个连续可导函数，且满足方程 $f(x)=\cos 2x+\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

四、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$. 设 $F(x)=x^3 f(x)$，试证在 $(0,1)$ 内存在一点 ξ，使得 $F'''(\xi)=0$.

五、简答

（1）计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\sin^2 x\right]\cos^2 x\mathrm{d}x$；

（2）讨论积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}$ 的敛散性.

六、证明当 $x>0$ 时，$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}$.

七、已知 $f(\pi)=2$，$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，求 $f(0)$.

八、求微分方程 $y''-3y'+2y=-x\mathrm{e}^x+\cos x$ 的通解.

“数学分析（上）”期末试题 1 参考答案

一、1．-7，6；2．$\dfrac{\pi}{6}$；3．$-\ln(1-x)-x+C\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$；

4．$y-1=-2x$，即 $y+2x-1=0$；5．$\sin x^2$；6．$2\ln x-\ln^2 x+C$；

7．$\dfrac{1}{2}\arctan\left(\tan^2 x\right)+C$；8．$\dfrac{20}{3}$；9．2；10．$y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+x$，其中 C_1，C_2 为任意常数.

二、解:由于曲线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，所以 $c=0$．又由题设知该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的面积

$$S=\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

整理可得$\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{3}$，所以$b=\dfrac{2}{3}(1-a)$.

旋转体的体积

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^2}{5}+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)=\pi\left[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}(1-a)^2\right].$$

令
$$V_a{}'=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0,$$

则得唯一驻点 $a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$.

又由题设知存在最小值，故当$a=-\dfrac{5}{4}$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=0$时，旋转体的体积最小.

三、解：对方程 $f(x)=\cos 2x+\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 两边求导得

$$f'(x)=-2\sin 2x+f(x)\sin x.$$

这是一个一阶线性非齐次方程，并且满足 $f(0)=\cos 0=1$. 因此所求 $f(x)$ 即为下列初值问题的解

$$\begin{cases}f'(x)-\sin x f(x)=-2\sin 2x,\\ f(0)=1.\end{cases}$$

故
$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{-\int-\sin x\mathrm{d}x}\left[\int-2\sin(2x)\mathrm{e}^{\int-\sin x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-\cos x}\left[\int-2\sin(2x)\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}x+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-\cos x}\left(4\int\cos x\mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{d}\cos x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\cos x}\left[4(\cos x-1)\mathrm{e}^{\cos x}+C\right].\end{aligned}$$

即
$$f(x)=4(\cos x-1)+C\mathrm{e}^{-\cos x}.$$

代入初值条件 $f(0)=1$, 得 $C\mathrm{e}^{-1}=1$，所以$C=\mathrm{e}$. 故

$$f(x)=4(\cos x-1)+\mathrm{e}^{1-\cos x}.$$

四、证明:由 $f(0)=f(1)=0$，知函数F 在$[0,1]$上满足罗尔定理，因此存在$\xi_1\in(0,1)$使得$F'(\xi_1)=0$.

又由 $F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$，知 $F'(0)=0$. 对 $F'(x)$ 在 $[0,\xi_1]$ 上应用罗尔定理，存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$，使得$F''(\xi_2)=0$.

而
$$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x),\ F''(0)=0,$$
故对 $F''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，知存在 $\xi\in(0,\xi_2)\subset(0,1)$, 使 $F'''(\xi)=0$.

五、解：（1）易见 $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cos^2x$ 是奇函数， $\sin^2x\cos^2x$ 是偶函数，故

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sin^2x\right]\cos^2x\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cos^2x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x$$
$$=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}.$$

（2）因为 $x=1$ 是 $\dfrac{1}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}$ 的奇点，所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}$$
$$=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

由于
$$\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}=2\neq0,$$

且 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}$ 收敛.

又 $0<\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}<\dfrac{1}{x^5}$，且 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x^5}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}$ 收敛.

综上所述，知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+2x-3}}$ 收敛.

六、证明：令
$$f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2},$$
则
$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>0.$$

因此，当 $x>0$ 时， $f(x)$ 严格单调递增， $f(x)>f(0)=0$.

故，当 $x>0$ 时，

$$1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)>\sqrt{1+x^2}\ .$$

七、解:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\mathrm{d}x\\
&=f'(x)\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\mathrm{d}x\\
&=-f(x)\cos x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x\\
&=f(0)+f(\pi)-\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

代入题设积分等式得 $f(0)+f(\pi)=5$ ，又 $f(\pi)=2$ ，故 $f(0)=3$.

八、解:特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$ ，特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ ，故所对应的齐次线性方程的通解为 $\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}$.

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设方程特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中 y_1^*,y_2^* 分别为方程

$$y''-3y'+2y=-x\mathrm{e}^x \tag{1}$$

和

$$y''-3y'+2y=\cos x \tag{2}$$

的特解.

由于 $\lambda=1$ 是单重特征根，故设 $y''-3y'+2y=-x\mathrm{e}^x$ 的特解为

$$y_1^*=x(ax+b)\mathrm{e}^x\ .$$

代入式（1）比较系数得 $a=\dfrac{1}{2},b=1$ ，于是方程（1）的特解为

$$y_1^*=x\left(\frac{x}{2}+1\right)\mathrm{e}^x.$$

由于 $\lambda=i$ 不是特征根，故可设 $y''-3y'+2y=\cos x$ 的特解为

$$y_2^*=a\cos x+b\sin x.$$

则 $$(y_2^*)'=-a\sin x+b\cos x,\qquad (y_2^*)''=-a\cos x-b\sin x,$$

代入方程（2）得

$$-(a\cos x+b\sin x)-3(-a\sin x+b\cos x)+2(a\cos x+b\sin x)=\cos x.$$

比较系数得 $a=\dfrac{1}{10}, b=-\dfrac{3}{10}$.

于是方程（2）的特解为 $$y_2^*=\frac{1}{10}(\cos x-3\sin x).$$

故原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\mathrm{e}^x+\frac{1}{10}\left(\cos x-3\sin x\right).$$

“数学分析（上）”期末试题 2

一、填空

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=$________________________.

2．$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=$______________________.

3．设 $f'(3x-1)=\mathrm{e}^x$，则 $f(x)=$___________________________.

4．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线方程为______________________.

5．设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x tf(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t=$________________.

6．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\displaystyle\int xf'(x)\mathrm{d}x=$____________.

7．$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}\,\mathrm{d}x=$_________________________.

8．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\[2mm] \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0,\end{cases}$ 则 $\displaystyle\int_0^2 f(x-1)\,\mathrm{d}x=$__________.

9．$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x=$_____________________________.

10．已知 $y_1=3, y_2=3+x^2$，$y_3=3+x^2+\mathrm{e}^x$ 都是某二阶线性非齐次微分方程的解，则此方程的通解为 ____________.

二、设 P 为曲线 $\begin{cases} x=\cos\ t, \\ y=2\sin^2 t, \end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 上的一点，此曲线与直线 OP（其中 O 为坐标原点）及 x 轴所围成的面积为 S，求 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 取最大值时 P 点的坐标.

三、设 $f(x)$ 是一个连续可导函数，且满足方程 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}+\int_0^x(x^2-t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的表达式.

四、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0<a<b$，求证:存在 $\xi,\eta\in(a，b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$.

五、简答题

（1）计算 $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$；（2）讨论积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 的敛散性.

六、证明当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时 $\sin x+\tan x>2x$.

七、已知 $f(2)=\dfrac{1}{2}, f'(2)=0$ 及 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=1$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$.

八、求微分方程 $y''-2y'+2y=x^2+\mathrm{e}^x\cos x$ 的通解.

“数学分析（上）”期末试题 2 参考答案

一、1．e^2；2．$2(2\ln2-1)$；3．$3\mathrm{e}^{\frac{x+1}{3}}+C$；4．$y-1=\dfrac{1}{2}x$，即 $x-2y+2=0$；

5．$xf(x^2)$；6．$\dfrac{x\cos x-2\sin x}{x}+C$；7．$4\left[\sqrt[4]{x}-\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|\right]+C$

8．$\ln(1+\mathrm{e})$；9．$\dfrac{\pi}{2}$；10．$y=C_1x^2+C_2\mathrm{e}^x+3$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

二、解：过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 N，曲线与 x 轴的交点为 Q，则面积 S 分为两部分，直角三角形 OPN 的面积 S_1 和由曲线及 x 轴和直线 $x=\cos t$ 所围成的曲边三角形 NPQ 的面积 S_2，且

$$S_1=\frac{1}{2}\cos t(2\sin^2 t)=\sin^2 t\cos t,\qquad S_2=\int_{\cos t}^{1} y\,\mathrm{d}x=\int_{\cos t}^{1}2(1-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}=2\mathrm{sint}\cos^2 t-\sin^3 t+2(1-\cos^2 t)\sin t=2\sin t-\sin^3.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}t^2}=2\cos t-3\sin^2 t\cos t=0,$$

得

$$t_1=\frac{\pi}{2},\qquad t_2=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

又

$$\left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1,\quad \left.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

所以当 $t=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$ 时，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 取最大值，此时 P 点的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3}\right)$.

三、解：根据定积分的性质：

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}+x^2\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f'(t)\,\mathrm{d}t,$$

两边对 x 求导得

$$f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}+2x[f(x)-f(0)].$$

又 $f(0)=\mathrm{e}^{-0}=1$，所以 $f'(x)-2xf(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}-2x.$

这是一个一阶线性非齐次微分方程，并且满足初值条件 $f(0)=1.$　因此所求 $f(x)$ 即为下列初值问题的解

$$\begin{cases} f'(x)-2xf(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}-2x,\\ f(0)=1.\end{cases}$$

又

$$\begin{aligned} f(x)&=\mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x}\left[\int(-2x\mathrm{e}^{-x^2}-2x)\mathrm{e}^{-\int 2x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\\ &=\mathrm{e}^{x^2}\left[-\int\left(2x\mathrm{e}^{-2x^2}+2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\mathrm{d}x+C\right]\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+1+C\mathrm{e}^{x^2}.\end{aligned}$$

代入初值条件 $f(0)=1$，得 $C=-\frac{1}{2}$.

故
$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}+1.$$

四、证明：因函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，故由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

令 $g(x)=x^2$, 则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$. 故由柯西中值定理可知，存在 $\eta\in(a,b)$, 使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},$$
即
$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},$$
也即
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b).$$
故
$$f'(\xi)=\frac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b).$$

五、解：（1）
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}\left(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x\\&=0+2=2.\end{aligned}$$

（2）因为 $x=2$ 是 $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-2x+2}}$ 的奇点，所以
$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}=\int_2^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}+\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}}=\dfrac{1}{8}\neq 0$, 且 $\displaystyle\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

又 $0<\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}<\dfrac{1}{x^4}$，且 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

综上所述，知$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$收敛.

六、证明：令
$$f(x)=\sin x+\tan x-2x,$$
则
$$f'(x)=\cos x+\sec^2 x-2\geqslant\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-2>0,$$
或
$$f''(x)=-\sin x+2\sec^2 x\tan x=\sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x}-1\right)>0.$$

所以$f'(x)$严格单调递增，故$f'(x)>f'(0)=0$，因而$f(x)$严格单调递增，故$f(x)>f(0)=0$，即$\sin x+\tan x>2x.$

七、解：令$t=2x$, 则$\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. 当$x=0$时，$t=0$；当$x=1$时，$t=2$. 于是

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{4}t^2 f''(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^2 t^2\mathrm{d}(f'(t))=\frac{1}{8}\left[t^2 f'(t)\Big|_0^2-2\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\frac{1}{4}\int_0^2 t\mathrm{d}(f(t))=-\frac{1}{4}\left[tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\frac{1}{4}(1-1)=0.$$

八、解：特征方程$\lambda^2-2\lambda+2=0$，有一对共轭复根$\lambda_{1,2}=1\pm\mathrm{i}$，故所对应的齐次线性方程的通解为$\overline{y}=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设方程特解为$y^*=y_1^*+y_2^*$, 其中y_1^*, y_2^*分别为方程
$$y''-2y'+2y=x^2 \tag{1}$$
和
$$y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x\cos x \tag{2}$$
的特解.

由于$\lambda=0$不是特征根，故设
$$y_1^*=ax^2+bx+c,$$
则
$$(y_1^*)'=2ax+b,\quad (y_1^*)''=2a.$$

代入方程（1）得 $$2a-2(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2,$$

比较系数可得 $a=\frac{1}{2},b=1,c=\frac{1}{2}$，故

$$y_1^*=\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x+1)^2.$$

另外，由于 $\lambda=1+\mathrm{i}$ 是单重特征根，故可设 $y''-2y'+2y=\mathrm{e}^x\cos x$ 的特解为

$$y_2^*=x\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x),$$

则 $$(y_2^*)'=\mathrm{e}^x(1+x)(a\cos x+b\sin x)+x\mathrm{e}^x(-a\sin x+b\cos x),$$

$$(y_2^*)''=2\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)+2(x+1)\mathrm{e}^x(-a\sin x+b\cos x),$$

代入方程（2）得

$$2\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)+2(x+1)\mathrm{e}^x(-a\sin x+b\cos x)-$$

$$2\mathrm{e}^x(1+x)(a\cos x+b\sin x)-2x\mathrm{e}^x(-a\sin x+b\cos x)+$$

$$2x\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x)=\mathrm{e}^x\cos x,$$

即

$$2\mathrm{e}^x(-a\sin x+b\cos x)=\mathrm{e}^x\cos x.$$

比较系数得 $a=0,b=\frac{1}{2}$. 于是

$$y_2^*=\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\sin x.$$

故原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{x}{2}\mathrm{e}^x\sin x.$$

“数学分析（上）”期末试题 3

一、填空

1． $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5}{3x+2}\sin\frac{2}{x}=$________________________.

2． $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}=$__________________________.

3．设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$________________.

4．设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________________.

5．设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b xf(tx)\mathrm{d}t=$________________.

6．设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，则 $\int_{-1}^2 f(x+1)\mathrm{d}x=$________________.

7．$\int_{-1}^1 \dfrac{4+\sin 2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$____________________.

8．以 $y_1=\mathrm{e}^{2x}, y_2=x\mathrm{e}^{2x}$ 为特解的二阶线性常系数齐次微分方程是______________________.

9．$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=$____________________________.

10．$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x=$_______________________.

二、曲线 $y=\dfrac{1}{a^2}x^2(0<a<1)$ 将图 1 中边长为1的正方形分成 A,B 两部分.

（1）分别求 A 绕 y 轴旋转一周与 B 绕 x 轴旋转一周所得两旋转体的体积 V_A 与 V_B.

（2）当 a 取何值时，V_A+V_B 取得最小值？

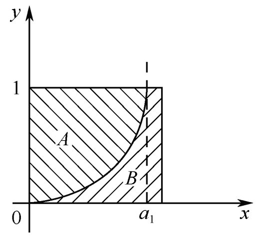


图 1

三、设 $f(x)$ 可导，且满足方程

$$f(x)-1=\int_1^x\left[f^2(t)\ln t-\frac{f(t)}{t}\right]\mathrm{d}t,$$

求 $f(x)$ 的表达式.

四、设 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$，求证: $\exists\xi\in(0,\ 1)$ 使得 $f''(\xi)=2$.

五、简答题

（1）设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$；（2）讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 的敛散性.

六、证明当 $x\in(0,2)$ 时，$4x\ln x\geqslant x^2+2x-3$.

七、设 $f(x)=\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$，求 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

八、求微分方程 $y''-3y'+2y=-xe^x-2e^x\cos x$ 的通解.

“数学分析（上）”期末试题 3 参考答案

一、1．$\dfrac{2}{3}$；2．0；3．$n!$；4． $x-1$；5． $bf(bx)-af(ax)$；6． $e+1$；

7． 2π；8． $y''-4y'+4y=0$；9． $\dfrac{1}{2}x\left[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right]+C$；10． π .

二、解：（1）$V_A=\pi\int_0^1 x^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 a^2y\,\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\pi a^2$,

$$V_B=\pi\int_0^a y^2\mathrm{d}x+\pi\cdot 1^2\cdot(1-a)$$

$$=\pi\int_0^a\frac{x^4}{a^4}\,\mathrm{d}x+\pi(1-a)=\frac{1}{5}\pi\frac{x^5}{a^4}\bigg|_0^a+\pi(1-a)=\pi\left(1-\frac{4}{5}a\right).$$

（2）令 $h(a)=V_A+V_B$，则

$$h(a)=\frac{1}{2}\pi\left(a^2-\frac{8}{5}a+2\right),$$

$$h'(a)=\frac{1}{2}\pi\left(2a-\frac{8}{5}\right).$$

令 $h'(a)=0$，得 $a=\dfrac{4}{5}$. 又 $h''\left(\dfrac{4}{5}\right)=\pi>0$，即当 $a=\dfrac{4}{5}$ 时 $h(a)$ 取得极小值，而在开区间 $(0,1)$ 内极值点唯一，所以当 $a=\dfrac{4}{5}$ 时，V_A+V_B 取得最小值.

三、解：当 $x=1$ 时，得 $f(1)-1=0$，即 $f(1)=1$.

对方程
$$f(x)-1=\int_1^x\left[f^2(t)\ln t-\frac{f(t)}{t}\right]\mathrm{d}t$$

两边求导得

$$f'(x)=f^2(x)\ln x-\frac{f(x)}{x},$$

即
$$f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=(\ln x)f^2(x).$$

这是一个伯努利方程，故令 $u=\dfrac{1}{f(x)}$，则微分方程变为

$$u'-\frac{1}{x}u=-\ln x.$$

解得
$$u=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-\ln x)\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right),$$

即
$$\frac{1}{f(x)}=-\frac{x}{2}\ln^2 x+Cx.$$

又由初始条件 $f(1)=1$，得 $C=1$，于是

$$f(x)=\frac{2}{2x-x\ln^2 x}.$$

四、证明：令 $F(x)=f(x)-x^2$，则 $F\in C[0,1]$，且函数 F 在 $(0,1)$ 内可导. 故由拉格朗日定理知 $\exists\eta\in(0,1)$，使得

$$F'(\eta)=F'(\eta)(1-0)=F(1)-F(0)=-1.$$

又由 $F'(x)=f'(x)-2x$，知 $F'\in C[0,1]$，且 F' 在 $(0,1)$ 内可导，那么

$$F'(1)=f'(1)-2=-1=F'(\eta),$$

故由罗尔定理知 $\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $F''(\xi)=0.$

而
$$F''(x)=f''(x)-2,$$

故
$$f''(\xi)=2$$

五、解：（1）由 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，得 $f(x)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}$.

于是
$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\ln(1+\mathrm{e}^x)$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$=x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

（2）因为 $x=1$ 是 $\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}$ 的奇点，所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}=\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq0$，且 $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ 收敛，所以 $\int_1^2\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 收敛.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}}{x^{-\frac{1}{2}}}=1$，且 $\int_2^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_2^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 发散.

综上所述，知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 发散.

六、证明：设 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$， $x\in(0,2)$，则 $f(1)=0$.

由 $f'(x)=4\ln x-2x+2$ 可得 $f'(1)=0$.

由 $f''(x)=\dfrac{4}{x}-2>0$ 可得 $f'(x)$ 单调递增.

又由 $f'(1)=0$ 可得 $\begin{cases}f'(x)<0, & x\in(0,1),\\ f'(x)>0, & x\in(1,2).\end{cases}$

故在 $(0,1)$ 上 $f(x)$ 单调递减；在 $(1,2)$ 上 $f(x)$ 单调递增；所以

$$f(x)\geqslant f(1)=0,$$

故

$$4x\ln x\geqslant x^2+2x-3.$$

七、解：
$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^a\left[\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\\&=x\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\bigg|_0^a+\int_0^a x\mathrm{e}^{(a^2-x^2)}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{(a^2-x^2)}\bigg|_0^a=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{a^2}-1\right).\end{aligned}$$

八、解：特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，由此得特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，故所对应的齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设方程特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中

y_1^*, y_2^* 分别为方程

$$y''-3y'+2y=-xe^x \tag{1}$$

和

$$y''-3y'+2y=-2e^x\cos x \tag{2}$$

的特解.

由于 $\lambda=1$ 是单重特征根，故设 $y''-3y'+2y=-xe^x$ 的特解为

$$y_2^*=x(ax+b)e^x,$$

代入式（1）比较系数得 $a=\frac{1}{2}, b=1,$ 于是

$$y_1^*=x\left(\frac{x}{2}+1\right)e^x.$$

又由于 $\lambda=1+i$ 不是特征根，故可设 $y''-3y'+2y=-2e^x\cos x$ 的特解为

$$y_2^*=e^x(a\cos x+b\sin x),$$

则

$$(y_2^*)'=e^x((a+b)\cos x+(b-a)\sin x),$$

$$(y_2^*)''=2e^x(b\cos x-a\sin x),$$

代入方程（2）得

$$2e^x(b\cos x-a\sin x)-3e^x((a+b)\cos x+(b-a)\sin x)+2e^x(a\cos x+b\sin x)=3e^x\cos x.$$

比较系数得 $a=1, b=1$.于是

$$y_2^*=e^x(\cos x+\sin x).$$

故原方程的通解为

$$y=\overline{y}+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}(x^2+2x)e^x+e^x(\cos x+\sin x).$$

“数学分析（上）”期末试题 4

一、填空

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x^2}-1}{x^2\tan x}=$ ____________________.

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x t^2 e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=$______________________.

3．设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $f'(1)=$________.

4．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上满足等式 $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt=x$，则 $f(2)=$________.

5．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=\sqrt{x}-2x\int_0^1 f(x)dx$，则 $f(x)=$________.

6．设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 6, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $\int_{-1}^1 f(x+1)\,dx=$________________.

7．$\int_{-1}^1 \dfrac{4+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}dx=$____________________________.

8．以 $y_1=e^{3x}, y_2=xe^{3x}$ 为特解的二阶线性常系数齐次微分方程是________.

9．$\int\cos(\ln x)dx=$___________________________________.

10．$\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=$____________________________.

二、设直线 $L: y=ax$ 与抛物线 $C: y=x^2$ 所围成的面积为 S_1；而直线 L 与抛物线 C 及直线 $x=1$ 所围成的面积为 S_2，且 $0<a<1$.

（1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小值，并求出此最小值；

（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

三、设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且满足方程 $\int_0^x tf(t)\,dt=x^2+2+f(x)$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

四、设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$.证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

五、简答题

（1）设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx$.

（2）讨论广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}$的敛散性.

六、讨论方程$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}x+b$的实根个数.

七、设$f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y$，求$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$.

八、求微分方程$y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x\sin x$的通解.

“数学分析（上）”期末试题4参考答案

一、1．$\frac{1}{2}$；2．$\frac{1}{2}$；3．2；4．$\frac{1}{5}$；5．$\sqrt{x}-\frac{2x}{3}$；6．7；

7．2π；8．$y''-6y'+9y=0$；9．$\frac{1}{2}x\left[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)\right]+C$；10．2.

二、解：（1）联立方程$\begin{cases}y=ax,\\ y=x^2,\end{cases}$求得交点为$P(a,a^2)$.

由于$0<a<1$，故

$$S_1=\int_0^a (ax-x^2)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{6},$$

$$S_2=\int_a^1 (x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{6}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

故
$$S=S_1+S_2=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}.$$

令$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}a}=a^2-\frac{1}{2}=0,$得

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left.2a\right|_{a=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}>0.$$

故
$$S_{\min}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

（2）
$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{x^2}{2}-x^4\right)dx+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\left(x^4-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi .$$

三、解：当 $x=0$ 时，得 $f(0)=-2$.

对方程 $\int_0^x tf(t)\,dt=x^2+2+f(x)$ 两边求导得

$$f'(x)-xf(x)=-2x .$$

这是一个一阶线性非齐次常微分方程，其通解为

$$f(x)=e^{-\int -x dx}\left[\int -2xe^{\int -x dx}dx+C\right]=2+Ce^{\frac{x^2}{2}} .$$

即
$$f(x)=2+Ce^{\frac{x^2}{2}} .$$

又由初始条件 $f(0)=-2$，得 $C=-4$，于是 $f(x)=2-4e^{\frac{x^2}{2}}$.

四、证明：令 $F(x)=e^x f(x)$ 和 $G(x)=e^x$.

对 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上分别应用拉格朗日定理，则存在 $\xi,\eta\in(a，b)$，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)] ,$$

$$\frac{G(b)-G(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi} .$$

由条件 $f(a)=f(b)=1$，可得 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$，即

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1 .$$

五、解：（1）令 $u=\sin^2 x, f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，于是

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)dx=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,d\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}d\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C .$$

（2）因为 $x=1$ 是 $\dfrac{x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}$ 的奇点，所以

$$\int_1^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}=\int_1^{2}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}+\int_2^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt6}\neq0,$ 且 $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ 收敛，

故 $\int_1^2\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}$ 收敛.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}}{x^{-1}}=1$，且 $\int_2^{\infty}x^{-1}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_2^{\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}$ 发散.

综上所述，知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}$ 发散.

六、解：令 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x-b$，则函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$.

令 $f'(x)=0$，得唯一驻点 $x=1$，且 $f(1)=-b$.

当 $x>1$ 时 $f'(x)>0$；当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上严格单调递减；在 $[1,+\infty)$ 上严格单调递增.

又因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad f(1)=-b$，故

当 $b=0$ 时，$f(1)=0$，原方程有唯一实根 $x=1$；

当 $b<0$ 时，$f(1)>0$，原方程无实根；

当 $b>0$ 时，$f(1)<0$，原方程在 $(-\infty,1]$ 及 $[1,+\infty)$ 上各有唯一实根，故共有两个实根.

七、解：
$$\int_0^1(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x-1)^2\left[\int_0^x\mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac13(x-1)^3\int_0^x\mathrm{e}^{-y^2+2y}\mathrm{d}y\right]_0^1-\int_0^1\frac13(x-1)^3\mathrm{e}^{-x^2+2x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac16\int_0^1(x-1)^2\mathrm{e}^{-(x-1)^2+1}\mathrm{d}[(x-1)^2]\qquad（令\ (x-1)^2=u\ ）$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 \mathrm{e}^{-(x-1)^2+1}\mathrm{d}[(x-1)^2]$$

$$=-\frac{\mathrm{e}}{6}\int_1^0 u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).$$

即
$$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(\mathrm{e}-2).$$

八、解：特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，故所对应的齐次线性常微分方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设方程的特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中 y_1^*,y_2^* 分别为方程

$$y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^{2x} \tag{1}$$

和
$$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x\sin x \tag{2}$$

的特解.

由于 $\lambda=2$ 是单重特征根，故设 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解为

$$y_1^*=x\left(ax+b\right)\mathrm{e}^{2x},$$

则
$$\left(y_1^*\right)=\left(2ax^2+2(a+b)x+b\right)\mathrm{e}^{2x},$$

$$\left(y_1^*\right)''=\left(\ 4ax^2+4(2a+b)x+2(a+2b)\ \right)\mathrm{e}^{2x}.$$

代入方程（1）比较系数得 $a=1,b=-2,$ 于是方程（1）的特解为

$$y_1^*=x(x-2)\mathrm{e}^{2x}.$$

又由于 $\lambda=1+i$ 不是特征根，故可设 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x\sin x$ 的特解为

$$y_2^*=\mathrm{e}^x(a\cos x+b\sin x),$$

则

$$(y_2^*)'=\mathrm{e}^x\left((a+b)\cos x+(b-a)\sin x\right),\quad (y_2^*)''=2\mathrm{e}^x\left(b\cos x-a\sin x\right),$$

代入方程（2），得

$$2\mathrm{e}^x\left(b\cos x-a\sin x\right)-3\mathrm{e}^x\left((a+b)\cos x+(b-a)\sin x\right)+2\mathrm{e}^x\left(a\cos x+b\sin x\right)$$
$$=2\mathrm{e}^x\sin x.$$

比较系数得 $a=1, b=-1$．于是方程（2）的特解为 $y_2^*=\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)$.

故原方程的通解为

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x(x-2)\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x).$$

“数学分析（上）”期末试题 5

一、填空

1．极限 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=$________________________.

2．当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\int_0^x(t-t^2)\mathrm{d}t$ 的最大值是____________________.

3．设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\cdot\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\cdot\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于__________________.

4．已知 $\mathrm{d}f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 则 $f(x)=$______________________.

5．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________________________.

6．$\int_{-2}^{2}[f(x)+f(-x)]\tan x\mathrm{d}x=$____________________.

7．设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\sqrt{x}+x^2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$_______.

8．常微分方程 $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$ 的通解是________________________.

9．$\int\dfrac{1}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=$______________________.

10．$\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________________________.

二、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，且 $F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$，当 $x>0$ 时，有 $f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，试求 $f(x)$.

三、对 $|x|<1$, 证明存在 $\theta\in(0,1)$, 使得 $\arcsin x=\dfrac{x}{\sqrt{1-\theta^2x^2}}$，并求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

四、设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时， $y\geqslant 0$. 又知该抛物线与直线 $x=0,x=1$ 及 x 轴所围成的图形面积是 $\frac{1}{3}$. 求 a,b,c 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 V 最小.

五、设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 求证: $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

六、设 $x\geqslant 0$, 证明 $\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x}$.

七、简答题

（1）求摆线第一拱 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度.

（2）判别积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

八、求微分方程 $y''-2y'+2y=2x^2-3\mathrm{e}^x\sin 2x$ 的通解，以及满足条件 $y(0)=0,y'(0)=0$ 的特解.

“数学分析（上）”期末试题 5 参考答案

一、1． $\mathrm{e}^{\cot a}$；2． $\frac{1}{6}$；3．2；4． $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+C$；5． 0；6． 0；7． $\sqrt{x}+x^2$；

8． $(x+1)^2\left(\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right)$；9． $\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$；10． $\frac{\pi^2}{8}$.

二、解：由 $f(x)=F'(x)$，知 $F'(x)F(x)=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$，即

$$\int F(x)\mathrm{d}F(x)=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x},$$

从而
$$\frac{1}{2}F^2(x)=\arctan^2\sqrt{x}+C.$$

将初始条件 $F(1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ 代入上式，即得 $C=0$，故 $F(x)=\sqrt{2}\arctan\sqrt{x}$. 由此得

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+x)}\quad（x>0）.$$

三、证明：由泰勒公式，对任意 $|x|<1$, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$\arcsin x = \arcsin 0 + (\arcsin x)'|_{x=\theta}\ x = \frac{x}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}}.$$

又因为
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3),\ (x \to 0).$$

故当 $x \to 0$ 时有 $\frac{x}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}} = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$，由此知

$$\theta^2 = \frac{\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x^2\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2}.$$

两边取极限得

$$\lim_{x\to 0}\theta^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{x^2\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2} = \frac{1}{3},$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

四、解：由于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过原点，所以 $c = 0$.

由所围成图形的面积可知

$$\int_0^1 (ax^2 + bx)\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

整理得 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$，即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$. 于是旋转体体积

$$V_a = \pi\int_0^1 (ax^2 + bx)^2\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{a^2}{5} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2\right) = \pi\left(\frac{a^2}{5} + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{4}{27}(1-a)^2\right).$$

令
$$V_a' = \pi\left[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)\right] = 0,$$

得唯一驻点 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}$.

又知该问题存在最小值，故当 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 0$ 时旋转体体积最小.

五、证明：令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{g(x)}$, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$. 故由罗尔定理：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=\left(f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)\right)\mathrm{e}^{g(\xi)}=0\text{，}$$

而 $\mathrm{e}^{g(\xi)}\neq 0$ ，因此 $$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0\text{ .}$$

六、证明：设 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$, 则

$$f'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}.$$

当 $x\geqslant 0$ 时 $f'(x)>0$, 因此函数 $f(x)$ 严格单调递增，故 $f(x)\geqslant f(0)=0.$

从而当 $x\geqslant 0$ 时，$\ln(1+x)\geqslant\dfrac{\arctan x}{1+x}.$

七、解：（1） $$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.$$

（2） $x=0$ 为 $\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}$ 的奇点，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x\text{ .}$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\cdot\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)x^2}=1$ ，而 $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_0^1\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛.

又因为 $\forall x\in(1,+\infty)$ ，$\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}<\dfrac{1}{x\sqrt{x^5}}$ ，且 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上所述，可知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{(x+1)\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛.

八、解：特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$ ，特征根 $\lambda_1=1+\mathrm{i},\lambda_2=1-\mathrm{i}$ ，故所对应的齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x\cos x+C_2\mathrm{e}^x\sin x.$$

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设方程特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中 y_1^*,y_2^* 分别为方程

$$y''-2y'+2y=2x^2 \tag{1}$$

和
$$y''-2y'+2y=-3e^x\sin2x \tag{2}$$

的特解.

由于$\lambda=0$不是特征根，故设$y''-2y'+2y=2x^2$的特解为

$$y_1^*=ax^2+bx+c,$$

则
$$\left(y_1^*\right)'=2ax+b, \qquad \left(y_1^*\right)''=2a.$$

代入方程(1)比较系数得　$a=1,b=2,c=1$　于是方程（1）的特解为

$$y_1^*=x^2+2x+1.$$

又由于$\lambda=1\pm2i$不是特征根，故设$y''-2y'+2y=-3e^x\sin2x$的特解为

$$y_2^*=e^x(A\cos2x+B\sin2x).$$

代入方程（2）比较系数得　$A=0, B=1$，于是方程（2）的特解为

$$y_2^*=e^x\sin2x.$$

故原方程的通解为

$$y=\overline{y}+y_1^*+y_2^*=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x+\left(x^2+2x+1\right)+e^x\sin2x.$$

再将$y(0)=0, y'(0)=0$代入原方程的通解中易知$C_1=-1,\quad C_2=-3.$

因此，原方程的特解为

$$y=-e^x\cos x-3e^x\sin x+\left(x^2+2x+1\right)+e^x\sin2x.$$

“数学分析（上）”期末试题 6

一、填空

1．极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=$__________________.

2．极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sqrt{1+x}+2\sin x}{\tan x}=$________________.

3．已知$\dfrac{d}{dx}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$_____________.

4．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+e^x}dx=$________________.

5．设由方程 $\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{x^2}\sin t dt=1$ 确定 y 为 x 的隐函数，则 $\frac{dy}{dx}=$____________________.

6．$\int \frac{\tan x}{1+3\cos^2 x}dx=$__________________________.

7．已知 $f'(x)=\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, f(0)=0,$ 则 $f(x)=$_______________.

8．设 $y(x)$ 是微分方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$ 满足 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的解，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}=$______________________.

9．$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=$____________________________.

10．$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx=$________________________________.

二、求证方程 $x+p+q\cos x=0$ 有且只有一个实数根，其中 $0<q<1$.

三、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$, 且 $|f''(x)|\leqslant 2$, 证明 $|f'(x)|\leqslant 1$.

四、设通过点 $(0,0),(1,2)$ 的抛物线具有以下性质：（1）对称轴平行于 y 轴；（2）图形向上凸；（3）与 x 轴所围图形面积最小. 求该抛物线方程.

五、设 $f(x)$ 可导，且满足方程 $\int_0^x f(t)dt=x+\int_0^x tf(x-t)\,dt$，求 $f(x)$ 的表达式.

六、证明 $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}\,dx\leqslant 2e^2$.

七、简答题

（1）求摆线第一拱 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0,0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度.

（2）讨论积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}dx$ 的敛散性.

八、求微分方程 $y''-2y'+2y=2xe^x-3e^x\cos 2x$ 的通解，以及满足条件 $y(0)=0, y'(0)=0$ 的特解.

“数学分析（上）”期末试题 6 参考答案

一、1．$\dfrac{1}{2}$；2．$\dfrac{5}{2}$；3．-1；4．0；5．$-2x\mathrm{e}^{-y^2}\sin x^2$；

6．$\dfrac{1}{2}\ln(4+\tan^2 x)+C=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+3\cos^2 x}{\cos^2 x}+C$；7．$\arctan(\sin x)$；8．1；

9．$-2\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}-\ln\left|x\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}-1\right)^2\right|+C \quad =-2\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}-\ln\left|\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}+1}\right|+C$；10．$\dfrac{\pi^2}{8}$．

二、证明:令 $f(x)=x+p+q\cos x$，则 $f'(x)=1-q\sin x$.

由于　$0<q<1,|\sin x|\leqslant 1$，故 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 是严格单调增函数.

又易见 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，因此该方程只有一个实数根.

三、证明：对任意 $x\in[0,1]$，由泰勒公式得

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x)^2\quad(0<\eta<x),$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2\quad(x<\eta<1).$$

两式相减得
$$0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$

故

$$|f'(x)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|\leqslant\frac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\leqslant(1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\leqslant 1.$$

四、解：设所求的抛物线方程为 $y=ax^2+bx+c$.

由所求抛物线过点 $(0,0)$ 及 $(1,2)$ 知 $c=0,\quad a=2-b$. 又 $y=ax^2+bx$ 与 x 轴的交点分别为 $(0,0)$，$\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$，于是曲线与 x 轴所围图形的面积为

$$S(b)=\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{b^3}{6(2-b)^2}.$$

又$S'(b)=\dfrac{b^2(6-b)}{6(2-b)^3}$. 令$S'(b)=0$知$b_1=6,b_2=0$，对应的$a_1=-4,a_2=2$.由于图形向上凸可知$a_2=2$该舍去. 故$y=-4x^2+6x$.

五、解：设$u=x-t$，则

$$\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u,$$

故原方程为
$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x+x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u,$$

对积分方程两边关于x求导，得$f(x)=1+\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，且$f(0)=1$.

再对$f(x)=1+\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$两边对$x$求导，得微分方程$f'(x)=f(x)$.

易见，此微分方程的通解为$f(x)=C\mathrm{e}^x$. 又由$f(0)=1$，知$C=1$，于是所求函数为$f(x)=\mathrm{e}^x$.

六、证明：令$f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$, 则$f'(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}$. 令$f'(x)=0$, 得$x=\dfrac{1}{2}$.

又
$$f(0)=1, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}, f(2)=\mathrm{e}^2,$$

因此
$$\min_{[0,2]} f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}, \max_{[0,2]} f(x)=\mathrm{e}^2.$$

故
$$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\leqslant\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2.$$

七、解：（1）
$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.$$

（2）因为$x=1$是$\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}$的奇点，所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}\mathrm{d}x.$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\neq0$，且 $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ 收敛，所以 $\int_1^2\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}\mathrm{d}x$ 收敛.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}}{x^{-1}}=1$，且 $\int_2^{\infty}x^{-1}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_2^{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述，知 $\int_1^{+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{(x+1)(x^3-1)}}\mathrm{d}x$ 发散.

八、解：特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=1+\mathrm{i},\lambda_2=1-\mathrm{i}$，故所对应的齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x\cos x+C_2\mathrm{e}^x\sin x.$$

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设原微分方程的特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中 y_1^*,y_2^* 分别为方程

$$y''-2y'+2y=2x\mathrm{e}^x \tag{1}$$

和

$$y''-2y'+2y=-3\mathrm{e}^x\cos2x \tag{2}$$

的特解.

由于 $\lambda=1$ 不是特征根，故设 $y''-2y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的特解为

$$y_1^*=(ax+b)\mathrm{e}^x,$$

则

$$\left(y_1^*\right)'=(ax+a+b)\mathrm{e}^x,$$

$$\left(y_1^*\right)''=(ax+2a+b)\mathrm{e}^x,$$

代入方程（1）比较系数得 $a=2,b=0$, 于是方程(1)的特解为

$$y_1^*=2x\mathrm{e}^x.$$

又由于 $\lambda=1\pm2i$ 不是特征根，故设 $y''-2y'+2y=-3\mathrm{e}^x\cos2x$ 的特解为

$$y_2^*=\mathrm{e}^x(A\cos2x+B\sin2x).$$

代入方程（2）比较系数得 $A=1,B=0$, 于是方程（2）的特解为

$$y_2^*=\mathrm{e}^x\cos2x.$$

综上述知，原常微分方程的通解为

$$y=\bar{y}+y_1^*+y_2^*=C_1\mathrm{e}^x\cos x+C_2\mathrm{e}^x\sin x+2x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\cos 2x.$$

将 $y(0)=0, y'(0)=0$ 代入原常微分方程的通解中，易知 $C_1=-1,\quad C_2=-2.$

故原常微分方程的特解为

$$y=-\mathrm{e}^x\cos x-2\mathrm{e}^x\sin x++2x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\cos 2x.$$

“数学分析（上）”期末试题 7

一、填空

1．已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=$ ________________________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$ ______________________ .

3．若 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x), & x>0\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$ ________ .

4．设当 $x\to 0$ 时，x^α 是与 $\sqrt[5]{3x^2-4x^3}$ 同阶的无穷小量，则 $\alpha=$ ______ .

5．若函数 $y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，则 $y'(2)=$ _________.

6．不定积分 $\int \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\mathrm{d}x=$ ________________.

7．定积分 $\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}x=$ __________________.

8．微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解是________________________.

9．设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=$ ___________________.

10．广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x=$ ______________________________.

二、求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$ 的值.

三、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，连接点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直

线与曲线 $y=f(x)$ 交于点 $(c,f(c))\ (a<c<b)$．证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=0$．

四、已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+3$.求

（1）函数的增减区间和极值；
（2）函数图形的凹凸区间及拐点；
（3）函数图形的渐近线.

五、设曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 与 x 轴、y 轴及直线 $x=\xi\ (\xi>0)$ 所围成的平面图形面积为 S.

（1）求 S 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所得旋转体的体积 $V_x(\xi)$ 和 $V_y(\xi)$；

（2）求满足 $V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to\infty}V(\xi)$ 的 a；

（3）求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$ 与 x 轴、y 轴所围的非封闭图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

六、简答题

（1）计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$；

（2）判别积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

七、求微分方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}(4x+5)+\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的通解.

“数学分析（上）”期末试题 7 参考答案

一、1．$f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{x}{2}=1-\cos x$；2．$\dfrac{1}{3}$；3．1；4．$2/5$；5．$-2\pi/3$；

6．$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}+C$；7．$\dfrac{\pi}{2}-1$；8．$(x-4)y^4=Cx$；9．$4/\pi-1$；10．$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left[\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

二、解：
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}. \tag{1}$$

又
$$\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1+x)'\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

$$=(1+x)\ln(1+x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1=2\ln 2-1. \qquad (2)$$

综合式（1），（2）知原极限$=e^{2\ln 2-1}=4/e$.

三、证明：对$f(x)$在$[a,c]$和$[c,b]$上用拉格朗日中值定理，知存在$x_1\in(a,c), x_2\in(c,b)$使得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a},\quad f'(x_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

由题意知$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$，从而$f'(x_1)=f'(x_2)$.

在闭区间$[x_1,x_2]$上对$f'(x)$用罗尔定理，知存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使得$f''(\xi)=0$.

四、解：函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

$$y'=\frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3},\quad y''=\frac{6x}{(1+x)^4}.$$

令$y'=0$，得驻点 $x=0$及 $x=-3$．令$y''=0$，得$x=0$.

（1）函数的单调增加区间为$(-\infty,-3)$和$(-1,+\infty)$；单调递减区间为$(-3,-1)$．极大值为$f(-3)=-15/4$.

（2）函数图形在区间$(-\infty,-1)$及$(-1,0)$内是向上凸的，在区间$(0,+\infty)$内是向下凸的，拐点为$(0,3)$点.

（3）由$\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+3\right]=-\infty$，知$x=-1$是铅直渐近线；且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(1+x)^2}+\frac{2}{x}\right]=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{(1+x)^2}+3-x\right]=1.$$

故$y=x+1$是函数图形的斜渐近线.

五、解：（1）绕x轴旋转：

$$V_x(\xi)=\pi\int_0^{\xi}y^2dx=\pi\int_0^{\xi}e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2\xi}).$$

绕y轴旋转：
$$V_y(\xi)=2\pi\int_0^{\xi}xydx=2\pi\int_0^{\xi}xe^{-x}dx$$

$$=2\pi\left[-x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{\xi}+\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]=2\pi[-x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{\xi}+(-\mathrm{e}^{-x})\big|_0^{\xi}]$$

$$=2\pi(-\xi\mathrm{e}^{-\xi}+1-\mathrm{e}^{-\xi}).$$

（2）

$$V_x(a)=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a}).$$

由于

$$\lim_{\xi\to\infty}V(\xi)=\lim_{\xi\to\infty}\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi})=\frac{\pi}{2},$$

故

$$\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a})=\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{2}\ln 2.$$

（3）

$$V_y(\infty)=\lim_{\xi\to\infty}2\pi(-\xi\mathrm{e}^{-\xi}+1-\mathrm{e}^{-\xi})=2\pi.$$

六、解：（1）

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}\overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=}\int_{+\infty}^{0}\frac{1}{1+\dfrac{1}{t^3}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+t}{1+t^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

（2）

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$$

因为

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}=\frac{1}{2},$$

而$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛，所以$\int_0^1\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$收敛.易判断$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{(x+2)\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$绝对收敛．故原广义积分收敛.

七、解：对应的齐次方程$y''-3y'+2y=0$的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根为$\lambda_1=1,\lambda_2=2$.

齐次方程的通解为

$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$, 其中$C_1,C_2$为任意常数.

解下面两个非齐次方程

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{-x}\sin x, \tag{1}$$

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{2x}(4x+5) \tag{2}$$

由于 $\lambda=-1+i$ 不是特征根，因此方程（1）的特解可设为

$$y_1^*=\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\sin x).$$

代入式（1），易知 $A=B=1/10$，于是可得

$$y_1^*=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)/10.$$

又由于 $\lambda=2$ 是单重特征根，故（2）的特解可设为

$$y_2^*=x\mathrm{e}^{2x}(ax+b).$$

代入式（2），解得 $a=2,b=1$，可得

$$y_2^*=x\mathrm{e}^{2x}(2x+1).$$

于是所求方程的通解为

$$y=\overline{y}+y_1^*+y_2^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{10}(\cos x+\sin x)+x\mathrm{e}^{2x}(2x+1).$$

“数学分析（上）”期末试题 8

一、填空

1．已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=$ ________________________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$ ________________ .

3．设 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{2}{x}, x<0,\\ a+\sqrt{x}, x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$ ______________.

4．设当 $x\to 0$ 时，x^α 与 $\sin 2x-2\sin x$ 是同阶无穷小量，则 $\alpha=$ _______ .

5．函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 所确定，则 $y'=$ _________.

6．不定积分 $\int 2x\arctan x\mathrm{d}x=$ ________________.

7．定积分 $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x=$ _____________________ .

8．微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解是_________________________.

9．已知 $f(x)$ 有一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ ___________________.

10．广义积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{4x^2+4x+5}\mathrm{d}x=$________________

二、求定积分$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^\alpha}$的值，其中$\alpha>0$为常数.

三、设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$0<a<b$.证明存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}.$$

四、已知函数$y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$. 求（1）函数的增减区间及极值；（2）函数图形的凹凸区间及拐点；（3）函数图形的渐近线.

五、已知一抛物线通过x轴上的两点$A(1,0),B(3,0)$.

（1）求证：两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于x轴与该抛物线所围图形的面积；

（2）计算上述两平面图形绕x轴旋转一周所产生的旋转体的体积之比.

六、简答题

（1）计算广义积分 $\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$；

（2）判别积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)^3}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

七、求微分方程$y''-2y'+y=4x\mathrm{e}^x+\cos x$的通解.

“数学分析（上）”期末试题 8 参考答案

一、填空

1．$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x$；2．$-1/6$；3．$-\frac{\pi}{2}$；4．$\alpha=3$；

5．$\frac{y^2-\mathrm{e}^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$；6．$(x^2+1)\arctan x-x+C$；7．$2-\frac{2}{\mathrm{e}}$；

8．$y=(x+C)\cos x$；9．$2\ln x-\ln^2 x+C$；10．$\frac{\pi}{4}$.

二、解：作变换 $u=\frac{\pi}{2}-x$，则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^\alpha}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{1}{1+(\cot x)^\alpha}\cdot(-\mathrm{d}u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan u)^\alpha}{1+(\tan u)^\alpha}\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\tan x)^\alpha}{1+(\tan x)^\alpha}\mathrm{d}x.$$

于是
$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+(\tan u)^\alpha}{1+(\tan u)^\alpha}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$$

故
$$I=\frac{\pi}{4}.$$

三、证明：令 $g(x)=x^3$. 则函数 f，g 在 $[a,b]$ 满足柯西中值定理条件.
于是存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由此推出
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b)\frac{f'(\xi)}{3\xi^2}.$$

四、解: 函数的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$y'=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},\quad y''=\frac{6x}{(x-1)^4}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=0$ 及 $x=3$，（$x=1$ 是间断点).

令 $y''=0$，得 $x=0$.

（1）函数的单调递增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(3,+\infty)$；单调递减区间为 $(1,3)$. 极小值为 $f(3)=\dfrac{27}{4}$.

（2）函数图形在区间 $(-\infty,0)$ 内是向上凸的，在区间 $(0,1)$ 及 $(1,+\infty)$ 内是向下凸的，拐点为 $(0,0)$ 点.

（3）由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$，知 $x=1$ 是铅直渐近线；而

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=2.$$

故函数图形的斜渐近线是 $y=x+2$.

五、解：（1）设过 A,B 两点的抛物线方程为

$$y=a(x-1)(x-3)，$$

其中 a 可以大于零，或小于零.则抛物线与两坐标轴所围图形的面积为

$$S_1=\int_0^1|a(x-1)(x-2)|\,\mathrm{d}x=|a|\int_0^1(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}|a|.$$

抛物线与 x 轴所围图形的面积为

$$S_2=\int_1^3|a(x-1)(x-3)|\mathrm{d}x=|a|\int_1^3(4x-x^2-3)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}|a|.$$

所以 $S_1=S_2$.

（2）两抛物线与两坐标轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积为

$$V_1=\pi\int_0^1 a^2[(x-1)(x-3)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{38}{15}\pi a^2,$$

抛物线与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积为

$$V_2=\pi\int_1^3 a^2[(x-1)(x-3)]^2\,\mathrm{d}x=\frac{16}{15}\pi a^2.$$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{19}{8}$.

六、解：（1）
$$\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\sin^2 t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}}\,2\sin t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

（2）
$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)^3}}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)^3}}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)^3}}\mathrm{d}x.$$

因为
$$\lim_{x\to1^+}(x-1)\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)^3}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)}}=+\infty，$$

且 $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ 发散，于是 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{e}^{-x}\sin(2x)}{x\sqrt{(x-1)^3}}\mathrm{d}x$ 发散. 所以原广义积分发散.

七、解：对应的齐次方程 $y''-2y'+y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1$. 故齐次方程的通解为

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

接下来解下面两个非齐次方程

$$y'' - 2y' + y = 4xe^x, \tag{1}$$

$$y'' - 2y' + y = \cos x . \tag{2}$$

由于 $\lambda = 1$ 是二重特征根，因此方程（1）的特解可设为

$$y_1^* = x^2 (Ax + B) e^x .$$

将 y_1^* 代入方程（1），得 $(6Ax + 2B)e^x = 4xe^x$，易知 $A = \dfrac{2}{3}, B = 0$，于是

$$y_1^* = \frac{2}{3} x^3 e^x .$$

又由于 $\lambda = \mathrm{i}$ 不是特征根，故方程（2）的特解可设为

$$y_2^* = a\cos x + b\sin x .$$

将 y_2^* 代入方程（2）得，$-2b\cos x + 2a\sin x = \cos x$，易知 $a = 0, b = -\dfrac{1}{2}$. 于是

$$y_2^* = -\frac{1}{2}\sin x .$$

于是所求微分方程的通解为

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{2}{3} x^3 e^x - \frac{1}{2}\sin x.$$

“数学分析（上）”期末试题 9

一、填空

1．设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$, 则 $f(7) =$________________.

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}\right) =$______________________.

3．曲线 $y = \dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为________________________.

4．设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $\int_1^3 f(x-2)dx=$_______________.

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}=$_____________.

6．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx=$__________________.

7．已知函数 $f(x)=f(x+4), f(0)=0,$ 且在区间 $[-2,2]$ 上有 $f'(x)=|x|$ 则 $f(5)=$________________.

8．设 $y(x)$ 是微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=$______________________.

9．设 $\boldsymbol{a}=(3,-2,1),\boldsymbol{b}=(p,-4,-5)$.已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$____________.

10．过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程是________.

二、设函数 f 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1.$ 试证必存在 $\xi\in(0,3)$ 使得 $f'(\xi)=0.$

三、当 $x\to 0$ 时，试确定常数 A,B,C 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3).$

四、设函数 $f(x)$ 满足微分方程 $xf'(x)-3f(x)=-6x^2$，且由曲线 $y=f(x),$ 直线 $x=1$ 及 x 轴 $(x\geqslant 0)$ 所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小，试求函数 $f(x)$.

五、设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\dfrac{x}{t}\left[g\left(2x+\dfrac{1}{t}\right)-g(2x)\right],$ 其中函数 $g(x)$ 可导，且 $g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1),$ 计算积分 $\int_0^1 f(x)dx.$

六、简答题

（1）若积分 $\int_0^{\pi}\dfrac{\cos x}{(x+2)^2}dx=A,$ 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x\cos x}{x+1}dx.$

（2）讨论积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 的敛散性.

七、设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 及条件 $y(0)=2,\ y'(0)=-4,$ 求广义积分

$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x.$

八、设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n \ (n = 1, 2, \cdots).$

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限；（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

“数学分析（上）”期末试题 9 参考答案

一、1．$\dfrac{1}{12}$；2．$\dfrac{\pi}{4}$；3．$y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$；4．$\dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$；5．$\dfrac{\pi}{6}$；6．$\dfrac{\pi}{8}$；

7．$\dfrac{1}{2}$；8．2；9．$(14, 14, -14)$；10．$\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-5}{1}$.

二、证：由题意知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以在 $[0,2]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，故 $m \leqslant f(0), f(1), f(2) \leqslant M$，可得

$$m \leqslant \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} \leqslant M,$$

由介值定理可知，至少存在一点 $c \in [0,2]$ 使得

$$f(c) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3} = 1.$$

因此 $f(x)$ 满足下列条件：$f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，且 $f(c) = f(3) = 1$，故由罗尔定理知存在 $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$，使得 $f'(\xi) = 0$.

三、由泰勒公式得

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + o(x^3), \quad (x \to 0).$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^x(1 + Bx + Cx^2)\\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + o(x^3)\right)(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),\end{aligned}$$

可得

$$1 + (1+B)x + \left(C + B + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{B}{2} + C + \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3).$$

两边比较系数得

$$1 + B = A,\ C + B + \frac{1}{2} = 0,\ \frac{B}{2} + C + \frac{1}{6} = 0,$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$.

四、解：一阶线性微分方程 $xf'(x)-3f(x)=-6x^2$ 的通解是 $f(x)=Cx^3+6x^2$.

由曲线 $f(x)=Cx^3+6x^2$，直线 $x=1$ 及 x 轴 $(x\geqslant 0)$ 所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V(C)=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^1(Cx^3+6x^2)^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{C^2}{7}+2C+\frac{36}{5}\right).$$

$$V'(C)=\pi\left(\frac{2}{7}C+2\right),$$

令 $V'(C)=\pi\left(\frac{2}{7}C+2\right)=0$, 得唯一驻点 $C=-7$.又 $V''(C)=\frac{2}{7}\pi>0$, 可见 $V(C)$ 在唯一驻点 $C=-7$ 处取得极小值，也就是最小值.

所以函数的表达式为

$$f(x)=-7x^3+6x^2.$$

五、解：

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}x\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot\frac{g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)}{\frac{1}{t}}=xg'(2x).$$

于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xg'(2x)\mathrm{d}x\overset{2x=t}{=\!=\!=}\frac{1}{4}\int_0^2 tg'(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\left[tg(t)\Big|_0^2-\int_0^2 g(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[t(\ln(1+t))'\Big|_0^2-\int_0^2(\ln(1+t))'\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{t}{1+t}\Big|_0^2-\ln(1+t)\Big|_0^2\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}-\ln 3\right).$$

六、解（1）$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x+1}\mathrm{d}x.$$

令 $u=2x$，则

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u+2}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\cos u}{u+2}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos u}{(u+2)^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi+4}-\frac{1}{2}A.$$

（2）因为 $x=2$ 是 $\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-2x+2}}$ 的奇点，所以

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}=\int_2^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}+\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

由于
$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}}=\frac{1}{8}\neq 0,$$

且 $\displaystyle\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

又 $0<\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}<\dfrac{1}{x^4}$，且 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ 收敛， 所以 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

综上所述，知 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

七、解：所对应的齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-2$, 故所对应的齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2x\mathrm{e}^{-2x}.$$

注意到非齐次方程自由项的形式，由于 $\lambda=-2$ 是二重特征根，故设方程特解为

$$y^*=Ax^2\mathrm{e}^{-2x}.$$

将 y^* 代入原微分方程比较系数得 $A=\dfrac{1}{2}$，于是原微分方程的特解为

$$y^* = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}.$$

故原方程的通解为

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}.$$

由初始条件 $y(0)=2,\ y'(0)=-4$，得 $C_1=2, C_2=0$，故原方程的特解为

$$y = \overline{y} + y^* = 2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{-2x} = \left(2+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}.$$

下面计算广义积分:

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(2+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(2+\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}e^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(2+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x e^{-2x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x e^{-2x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{d}e^{-2x}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left[x e^{-2x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{d}x\right] = \frac{9}{8}.$$

八、解：（1）当 $0<x_1<\pi$ 时，由递推公式易见 $x_2=\sin x_1<x_1$，且 $0<x_2<\pi$. 从而由数学归纳法可知: $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，且 $0<x_{n+1}<\pi,\ n=1,2,\cdots$ 所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减，而且有下界.

由单调收敛定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限得 $A=\sin A$，所以 $A=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

（2）
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0} e^{\frac{1}{y^2}\ln\left(\frac{\sin y}{y}\right)} = \lim_{y\to 0} e^{\frac{\frac{\sin y}{y}-1}{y^2}}$$

$$= \lim_{y\to 0} e^{\frac{\sin y - y}{y^3}} = \lim_{y\to 0} e^{-\frac{1}{6}}.$$

“数学分析（上）”期末试题 10

一、填空

1．已知 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x+\tan^2 x$，则当 $0<x<1$ 时， $f(x)=$________.

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}=$________.

3．设常数 $k>0$，则函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为________.

4．设三次曲线 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在点 $x=-1$ 处取得极大值，点 $(0,3)$ 是拐点，则 $a=$________，$b=$________，$c=$________.

5．设 $y=f(x)$ 由方程 $xy+2\ln y=y^4$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是________.

6．设 $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=4$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

7．以 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y^2=2x\mathrm{e}^x$ $y_3=\cos 2x$，$y_4=3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数线性齐次常微分方程是________.

8．设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

9．空间曲线 C： $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影曲线是________.

10． $\int_{-2}^{2}(x+1)\sqrt{4|x|-x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

二、证明当 $x>0$ 时 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

三、设 $0<a<b$. 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 证明：存在 ξ，$\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b)$.

四、设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续，在区间 $(0,1)$ 内大于零，并满足微分方程 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数）. 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围平面图形的面积为 $S=2$，求函数 $f(x)$ 的表达式；并问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

五、设 $f(x)$ 是一个连续函数，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

六、简答题

（1）计算积分 $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.　（2）讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 的敛散性.

七、求微分方程 $y''-3y'+2y=-x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x\cos x$ 的通解.

八、设函数 $f(x)$ 在 $(-L,L)$ 内连续，在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$.

（1）证明：对任意给定的 $0<x<L$ ，存在 $0<\theta<1$，使得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]；$$

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

“数学分析（上）”期末试题 10 参考答案

一、1．$-\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}+C$；2．$-\frac{1}{2}$；3．2；4．$a=0,\ b=-1,\ c=3$；5．$x-y=0$；6．24；

7．$y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$；8．$\dfrac{\frac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2}}{2t}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$；

9．$\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0; \end{cases}$　10．2π.

二、证：令

$$f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}.$$

则

$$f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$

故当 $x>0$ 时 $f'(x)$ 严格单调递增，即 $f'(x)>f'(0)=0$，可知 $f(x)$ 严格单调递增.

因此，当 $x>0$ 时 $f(x)>f(0)=0$，即

$$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}.$$

三、证明：因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中值定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$, 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

令 $g(x)=x^2$，则函数 f，g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$. 由柯西中值定理可知，存在 $\eta\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},$$

即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$，也即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(a+b).$

四、解：（1）微分方程 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$ 的通解为

$$f(x)=Cx+\frac{3a}{2}x^2.$$

又
$$S=2=\int_0^1\left(Cx+\frac{3a}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{C+a}{2},$$

可得 $C=4-a$，故

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x.$$

（2）旋转体体积

$$V(a)=\pi\int_0^1\left[\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x\right]^2\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{9a^2}{20}+\frac{(4-a)^2}{3}+\frac{3a(4-a)}{4}\right].$$

令 $V'(a)=\pi\left[\dfrac{9a^2}{10}-\dfrac{2(4-a)}{3}+3-\dfrac{3a}{2}\right]=0$，得 $a=-5.$

又 $\dfrac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}=\dfrac{\pi}{15}>0$，故 $a=-5$ 时，旋转体体积最小.

五、解：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，知 $f(0)=0$，$f'(0)=A$，且 $\varphi(0)=0.$

又
$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t\xrightarrow{u=xt}\varphi(x)=\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x}\quad(x\neq0),$$

得
$$\varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2},\quad(x\neq0).$$

又由导数定义

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

而
$$\lim_{x\to0}\varphi'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0),$$

可见 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

六、解：（1）$(x\sin x+\cos x)'=x\cos x$，

故
$$\int\frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos x}\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x}{\cos x}\frac{1}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)$$

$$=-\int\frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$$

$$=-\frac{x}{\cos x}\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C.$$

（2）因为 $x=1$ 是 $\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}$ 的奇点，所以

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}=\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}+\int_2^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\neq 0$，且 $\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 收敛.

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^3-1}}}{x^{-\frac{1}{2}}}=1$ 且 $\displaystyle\int_2^{+\infty}x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 发散.

综上所述，知 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-1}}$ 发散.

七、解：所对应的齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，由此得特征根 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，故所对应的齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

注意到自由项的形式，设方程的特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中 y_1^*，y_2^* 分别为方程

$$y''-3y'+2y=-x\mathrm{e}^x \qquad （1）$$

和 $$y''-3y'+2y=-2e^{x}\cos x \tag{2}$$

的特解.

由于$\lambda=1$是单重特征根，故设$y''-3y'+2y=-xe^{x}$的特解为

$$y_1^*=x(ax+b)e^{x}.$$

将y_1^*代入方程（1），比较系数得$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，于是方程（1）的特解为

$$y_1^*=x\left(\frac{x}{2}+1\right)e^{x}.$$

又由于$\lambda=1+i$不是特征根，故可设$y''-3y'+2y=-2e^{x}\cos x$的特解为

$$y_2^*=e^{x}(a\cos x+b\sin x).$$

则

$$(y_2^*)'=e^{x}((a+b)\cos x+(b-a)\sin x),$$

$$(y_2^*)''=2e^{x}(b\cos x-a\sin x).$$

代入方程（2），可得

$$2e^{x}(b\cos x-a\sin x)-3e^{x}((a+b)\cos x+(b-a)\sin x)+2e^{x}(a\cos x+b\sin x)=3e^{x}\cos x,$$

比较系数得$a=1$，$b=1$.

于是方程（2）的特解为

$$y_2^*=e^{x}(\cos x+\sin x).$$

故原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y_1^*+y_2^*=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{x}+e^{x}(\cos x+\sin x).$$

八、解方法 1：令$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{-x} f(t)\,dt$，则$F(x)$在$[0,x]$上可微，且$F(0)=0.$根据拉格朗日中值定理，存在$0<\theta<1$，使得$F(x)-F(0)=xF'(\theta x)$，即

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

方法 2：由积分中值定理可知，存在$0<\theta<1$，使得

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^x [f(t)-f(-t)]dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

从而，

$$\frac{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt}{x^2}=\frac{[f(\theta x)-f(-\theta x)]}{x}=\frac{f(\theta x)-f(0)}{x}-\frac{[f(-\theta x)-f(0)]}{x}.$$

令$x\to 0^+$，对上式两边分别取极限，易见

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{2x}+\lim_{x\to0^+}\frac{f(-x)-f(0)}{-2x}=f'(0).$$

又

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(\theta x)-f(0)}{x}-\frac{[f(-\theta x)-f(0)]}{x}\right]=2f'(0)\lim_{x\to0^+}\theta.$$

从而，$f'(0)=2f'(0)\lim\limits_{x\to0^+}\theta$. 由于 $f'(0)\neq0$，故 $\lim\limits_{x\to0^+}\theta=\dfrac{1}{2}$.

“数学分析（上）”期末试题 11

一、填空题

1．$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$________.

2．设 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^a}$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，则 a 的取值范围是________.

3．微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-2x\mathrm{e}^{-y}=0$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解为________.

4．积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{2x^2+x\sin^2x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=$________.

5．设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________.

6．设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)=x\arctan x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________.

7．设方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 有两个特解 $y_1=3+x^2+2\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=3+x^2$，且对应的齐次方程的一个特解为 $y_3=x$，则该方程的通解为________.

二、单选题

1．下列哪些说法与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义等价（　　）.

（A）$\forall\varepsilon>1$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$；

（B）$\forall N$，$\exists\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$；

（C）$\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant100\varepsilon$；

（D）$\exists N$，$\exists \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

2．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的（　　）；

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的（　　）.

（A）充分必要条件；　　（B）充分非必要条件；

（C）必要非充分条件；　　（D）既非充分也非必要条件.

3．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]$ 等于（　　）.

（A）$f(x)$；　　（B）$f(x)+C$；　　（C）$f(x)\mathrm{d}x$；　　（D）$f'(x)\mathrm{d}x$

三、简答题

（1）计算积分 $\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；（2）判别积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

四、设 $f(x)$ 可导且满足 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t = f(x) + x\sin x$，求 $f'(x)$.

五、设 $f(x)$ 的二阶导数在 $[2,4]$ 上连续，且 $f(3)=0$.

（1）将 $f(x)$ 在 $x=3$ 处展开成带拉格朗日余项的一阶泰勒公式；

（2）证明在 $[2,4]$ 上存在一点 η，使得 $f''(\eta) = 3\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

六、设曲线 $y=ax^2(a>0, x\geqslant 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一平面图形. 问 a 为何值时，该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最大？

七、求微分方程 $y''+y=2x^2-3+4\sin x$ 的通解.

八、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，证明：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

九、（附加题）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

“数学分析（上）”期末试题 11 参考答案

一、1．$\dfrac{\pi}{4}$；2．$1<a<3$；3． $y=\ln(1+x^2)$；4． $4-\pi$；5． $\mathrm{e}^{-1}-1$；

6． $f(x)=x\arctan x+1-\dfrac{\pi}{2}$；7． $y=C_1x+C_2\mathrm{e}^{2x}+3+x^2$，其中 C_1, C_2 为任意常数.

二、1．C；2．C，B；3．C.

三、解：（1）
$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right) = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$
$$= -\arctan x\Big|_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

（2）$x=0$ 为被积函数 $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}$ 的奇点，故
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$，且 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，故由比较准则 II 知 $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛.

又因为 $\forall x \in (1, +\infty)$，$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}} < \frac{1}{\sqrt{x^5}}$，且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以由比较准则 I 知，无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上所述，可知反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}\mathrm{d}x$ 收敛.

四、解：设 $y=tx$，则有
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = f(x) + x\sin x,$$
即
$$\int_0^x f(y)\mathrm{d}y = xf(x) + x^2\sin x.$$
两边关于变量 x 求导得
$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x\sin x + x^2\cos x \quad (x \neq 0),$$
故
$$f'(x) = -2\sin x - x\cos x.$$

五、（1）解：
$$f(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-3)^2$$
$$= f'(3)(x-3) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-3)^2,$$
其中 ξ 介于 x 和 3 之间.

（2）证明：对上式两端求定积分

$$\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_2^4 \frac{f''(\xi)}{2!}(x-3)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^4 f''(\xi)(x-3)^2\mathrm{d}x.$$

因为 $f(x)$ 的二阶导数连续，所以存在 M，m 使得

$$m\leqslant f''(\xi)\leqslant M,$$

从而
$$m\int_2^4(x-3)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_2^4 f''(\xi)(x-3)^2\mathrm{d}x\leqslant M\int_2^4(x-3)^2\mathrm{d}x,$$

即
$$\frac{2}{3}m\leqslant\int_2^4 f''(\xi)(x-3)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}M.$$

所以
$$\frac{m}{3}\leqslant\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{3},$$

即
$$m\leqslant 3\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M.$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，存在一点 $\eta\in[2,4]$，使得 $3\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=f''(\eta)$.

六、解：由 $\begin{cases}y=ax^2,\\ y=1-x^2,\end{cases}$ 解得交点为 $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a}\right)$.

直线 OA 的方程为 $y=\dfrac{a}{\sqrt{1+a}}x,\quad x\in\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}\right]$.

故平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left[\left(\frac{a}{\sqrt{1+a}}x\right)^2-(ax^2)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{2}{15}\pi\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\frac{\pi}{15}\frac{(4a-a^2)}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}=\frac{\pi}{15}\frac{a(4-a)}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=0$，得 $a=4$ 为唯一驻点.

当 $a<4$ 时，$V'(a)>0$，函数单调增加；当 $a>4$ 时，$V'(a)>0$，函数单调减少. 故 $a=4$ 是 $V(a)$ 的极大值点，又因为它是唯一驻点，所以 $a=4$ 是最大值点. 所以 $a=4$ 时旋转体的体积最大.

七、解：所对应的齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，由此得特征根 $\lambda_1=i,\ \lambda_2=-i$，

故所对应的齐次线性方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

注意到自由项的形式，由线性方程特解的叠加原理，先设方程特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$，其中 y_1^*，y_2^* 分别为方程

$$y''+y=2x^2-3 \tag{1}$$

和

$$y''+y=4\sin x \tag{2}$$

所对应的特解.

由于 $\lambda=0$ 不是特征根，故设 $y''+y=2x^2-3$ 的特解为

$$y_1^*=ax^2+bx+c,$$

代入方程（1）比较系数得 $a=2,\ b=0,\ c=-7$，所以 $y''+y=2x^2-3$ 对应的一个特解为

$$y_1^*=2x^2-7.$$

由于 $\lambda=\pm i$ 是特征根，故设 $y''+y=4\sin x$ 的特解为

$$y_2^*=x(a\cos x+b\sin x),$$

代入方程（2）得 $a=-2,\ b=0$. 所以方程 $y''+y=4\sin x$ 的一个特解为

$$y_2^*=-2x\cos x.$$

综上所述，原方程的通解为

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x+2x^2-7,$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

八、证明：由 $f''(x)>0$ 知 $f(x)$严格下凸，故由下凸函数的性质（或由泰勒公式）可得

$$f(x)>f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right),$$

两边积分得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

又由 $f(x)$严格下凸知

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

两边积分得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<\int_a^b\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

九、证明：由积分中值定理得

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\sqrt{h}}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= f(\xi_1)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt{h}} + f(\xi_2)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} + f(\xi_3)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{\sqrt{h}}^{1}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 $\xi_1 \in [-1,-\sqrt{h}]$，$\xi_2 \in [-\sqrt{h},\sqrt{h}]$，$\xi_3 \in [\sqrt{h},1]$，$h>0$.

因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界. 设 $|f(x)|\leqslant M$，于是有

$$|I_1|\leqslant M\left|-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}+\arctan\frac{1}{h}\right| \to M\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0 \quad (h\to 0^+)\,;$$

$$|I_3|\leqslant M\left|\arctan\frac{1}{h}-\arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right| \to 0 \quad (h\to 0^+)\,;$$

$$\lim_{h\to 0^+} I_2 = 2\lim_{h\to 0^+} f(\xi_2)\arctan\frac{1}{\sqrt{h}} = 2f(0)\cdot\frac{\pi}{2} = \pi f(0).$$

综上可知，$\lim\limits_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0)$ 成立.

“数学分析（上）”期末试题 12

一、填空题

1．$\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}(x^2)}=$____________________.

2．$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=$____________________.

3．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\tan 3x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

4．反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$ 是________的（收敛、发散）.

5．微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{y^3+x}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解为__________________________.

6．设 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int xf(1-x^2)\,\mathrm{d}x=$__________________________.

7．设 $x>0$ 时 $f(x)$ 可导，且满足方程 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 的表达式为________.

8．极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}=$________.

9．函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, x\neq 0 \\ 0 \quad, x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 是________型间断点（可去、跳跃、无穷等）.

10．函数 $f(x)=\ln x$ 在 $x_0=1$ 点的带佩亚诺余项的 n 阶泰勒展开式为__________________.

二、计算题

1．求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{x}{\pi}\right)^x$，　　　2．$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

三、设连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f(x)\geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\,dx=0$，证明 $f(x)\equiv 0$.

四、证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$.

五、已知 $y_1=xe^x+e^{2x}$，$y_2=xe^x+e^{-x}$，$y_3=xe^x+e^{2x}+e^{-x}$ 是某二阶线性常系数非齐次微分方程的三个解，求此微分方程及其通解.

六、曲线 $a^2y=x^2(0<a<1)$ 将图 1 中边长为 2 的正方形分成 A，B 两部分.

（1）分别求 A 绕 y 轴旋转一周与 B 绕 x 轴旋转一周所得两旋转体体积 V_a 与 V_b.

（2）当 a 取何值时，V_a+V_b 取得最小值？

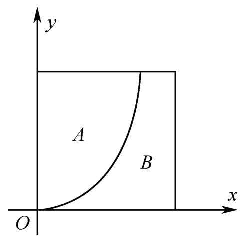


图 1

七、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}, & x<0, \\ ax+b, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 问

是否存在常数 a，b 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导？

八、设 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上可积，$a,b\in[A,B]$ 是 $f(x)$ 的两个连续点，证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx=f(b)-f(a).$$

九、(附加题)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调减少，证明：对任何 $\lambda\in(a,b)$，均有

$$\int_a^\lambda f(x)\,dx\geqslant\frac{\lambda-a}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

“数学分析（上）”期末试题 12 参考答案

一、1．提示：令 $x^2=t$，$x=\sqrt{t}$，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right)=\dfrac{\sqrt{t}\cos\sqrt{t}-\sin\sqrt{t}}{2t\sqrt{t}}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$；

2．提示：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{2\tan^2 x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)+C$

或 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cot x\right)+C$；

3．6；4．收敛；5． $x=\dfrac{y}{2}(y^2-1)$；6． $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$；7． $f(x)=\ln x+1$；

8． $\dfrac{3}{5}$；9．无穷型间断点；

10． $\ln x=(x-1)-\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}+o((x-1)^n)$．

二、1．解：

$$I=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{\pi}}{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}-\frac{x^2}{\pi}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\arctan\frac{x}{\pi}}\right\}=\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\frac{1}{\frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{2}}\right\}=\mathrm{e}^{-2}.$$

2．解：

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=-\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{1}{2}.$$

三、证法一：反证法. 假设 $\exists x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$．由函数的连续性知，存在 x_0 的 δ 邻域 $U(x_0,\delta)$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $f(x)\geqslant\dfrac{f(x_0)}{2}>0$．

由积分的区间可加性得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{f(x_0)}{2} 2\delta = f(x_0)\delta > 0,$$

这与已知矛盾. 所以 $f(x) \equiv 0$.

证法二：因为 $f(x)$ 连续，所以在 $[a,b]$ 上存在原函数. 设 $F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ ，那么

$$F(a) = 0,\ \ F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = 0.$$

又 $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ ，所以 $F(x)$ 单调增加. 即有 $F(b) \geqslant F(a)$ ，又 $F(b) = 0$ ，所以在 $[a,b]$ 上 $F(x) \equiv 0$ ，也就是 $f(x) = F'(x) \equiv 0$.

四、证明：设 $f(x) = \tan x - x - \dfrac{x^3}{3}$ ，则 $f(0) = 0$.

又
$$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2,\quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = 2\tan x \sec^2 x - 2x = 2\left(\frac{\tan x}{\cos^2 x} - x\right) > 2(\tan x - x) > 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

所以 $f'(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是严格单调递增的，即 $f'(x) > f'(0) = 0$.

从而知 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是严格单调递增的，即 $f(x) > f(0) = 0$.

所以 $\tan x - x - \dfrac{x^3}{3} > 0$ ，即 $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$ 成立.

五、解： $y_1 - y_3 = \mathrm{e}^{-x}$，$y_1 - y_2 = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}$ ， $(y_1 - y_3) + (y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{2x}$ 都是齐次方程的解.

从而知，二阶常系数齐次线性微分方程的特征方程的根为 $r_1 = -1$，$r_2 = 2$ ，所以对应的齐次方程为：

$$y'' - y' - 2y = 0 .$$

设非齐次方程为

$$y'' - y' - 2y = f(x),$$

把 $y_1 = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ 代入上式，得 $f(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^x$.

故所求非齐次方程为

$$y'' - y' - 2y = (1-2x)\mathrm{e}^x .$$

其通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x},$$

其中 C_1，C_2 为任意常数.

六、解：（1）
$$V_a=\int_0^2 \pi x^2 \mathrm{d}y=\pi\int_0^2 a^2 y \mathrm{d}y=\pi a^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2=2\pi a^2,$$

$$V_b=\int_0^{\sqrt{2}a}\pi y^2 \mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}a}^2 \pi 2^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x^4}{a^4}\mathrm{d}x+4\pi(2-\sqrt{2}a)=8\pi-\frac{16}{5}\sqrt{2}\pi a.$$

（2）
$$f(a)=V_a+V_b=2\pi a^2+8\pi-\frac{16}{5}\sqrt{2}\pi a.$$

$$f'(a)=4\pi a-\frac{16}{5}\sqrt{2}\pi,$$

令 $f'(a)=0$，得唯一驻点 $a=\frac{4}{5}\sqrt{2}$.

又 $f''(a)=4\pi>0$ 恒成立，所以 $a=\frac{4}{5}\sqrt{2}$ 是极小值点，也是最小值点.

七、解：要使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，必须在该点处连续. 即有

$$b=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1+\sqrt{1-x})}=\frac{1}{2}.$$

考虑函数在 $x=0$ 的可导性：

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(ax+b)-b}{x}=a,$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}-\frac{1}{2}\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2(1+\sqrt{1-x})^2}=\frac{1}{8}.$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有 $f_-'(0)=f_+'(0)$，即 $a=\frac{1}{8}$.

所以，当 $a=\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，从而在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导.

八、证明：因为 $f(x)$ 在 $[A,B]$ 上可积，所以 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 存在.

又 $f(x)$ 在点 a，b 连续，所以 $F(x)$ 在 a，b 可导.

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\mathrm{d}x=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^b f(x+h)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b+h}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{a}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(b+h)-F(a+h)+F(a)-F(b)]\quad (F(a)=0)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(b+h)-F(b)-(F(a+h)-F(a))]$$

$$=F'(b)-F'(a)=f(b)-f(a).$$

九、证明：由于$\int_{a}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\lambda-a}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$，等价于

$$\frac{1}{\lambda-a}\int_{a}^{\lambda} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

作函数$G(x)=\frac{1}{x-a}\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，则只需证$G(x)$在区间$(a,b]$单调减少.

$$G'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\frac{(x-a)f(x)-\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

$$=\frac{1}{(x-a)^2}\int_{a}^{x}[f(x)-f(t)]\,\mathrm{d}t.$$

由于$f(x)-f(t)\leqslant 0$，$\forall t\in[a,x)$，所以当$x\in(a,b]$时有$G'(x)\leqslant 0$.
故所要证明的不等式成立.

三、“数学分析（下）”期中试题

“数学分析（下）”期中试题 1

1．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n(n+1)^2}$的收敛域为________.

2．设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为 2，则级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x+1)^n$的收敛区间为________.

3．极限$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{(2n)^n}=$________.

4．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}$是否收敛________.

5．周期为2π的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上定义为$f(x)=\begin{cases} x^2, & -\pi \leqslant x < 0 \\ x-\pi, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$

设$f(x)$的傅里叶级数的和函数为$S(x)$，则$S(2\pi)=$________.

6．将函数$f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}$在$x_0=1$处展开成泰勒级数为____________________________.

7．设$x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx, (-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$，则$a_2=$________.

8．幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$的和$S(x)=$____________________.

9．设$\boldsymbol{a}=(3,2,1)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,\dfrac{4}{3},k\right)$，若$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$则$k=$________；　若$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$则$k=$________.

10．设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$____________________________.

11．曲线$\varGamma$：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$　$(a>0)$在xOz面上的投影为______________________.

12．一直线过点$M(-1,2,1)$且与平面$x+y-2z-1=0$和平面$x+2y-z+1=0$平行，则此直线的方程为__________________________.

13．设$f(x,y)=(1+xy)^{\frac{1}{x}}$，则$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}f(x,y)=$________.

14．若$u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$，则$\mathrm{d}u\big|_{(1,1,1)}=$__________________.

15．设$u=xf\left(x,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$具有二阶连续导数，则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=$________，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$________.

16．设由方程$x+y-z-\mathrm{e}^z=0$所确定的隐函数为$z=z(x,y)$，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________.

17．函数$u=xy^2+yz^3$在点$P(2,\ -1,\ 1)$处的梯度$\nabla u\big|_{(2,-1,1)}=$________，及沿方向$\boldsymbol{l}=(2,2,-1)$的方向导数$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\Big|_{(2,-1,1)}=$____________________.

“数学分析（下）”期中试题 1 参考答案

1．$[-2,2]$；2．$-3<x<1$；3．0；4．收敛；5．$S(0)=-\dfrac{\pi}{2}$；

6．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}(x-1)^{2n-1}$，$0<x\leqslant 2$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}[(-1)^n+1]$，$0<x\leqslant 2$；

7．1；8．xe^x+e^x；9．（1）$-\frac{26}{3}$，（2）$\frac{2}{3}$；10．24；11．$\begin{cases} z^2+ax=a^2 \\ y=0 \end{cases}$；

12．$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$；13．e；14．$dx-dy$；

15．$\frac{\partial u}{\partial x}=f+xf_1-\frac{y}{x}f_2$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f_{12}-\frac{y}{x^2}f_{22}$；

16．$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{e^z}{(1+e^z)^3}$；17．$\nabla u\big|_{(2,-1,1)}=(1,-3,-3)$，$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\bigg|_{(2,-1,1)}=-\frac{1}{3}$.

“数学分析（下）”期中试题 2

1．设 $a>0$，若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，则 a 应满足________.

2．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

3．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{2n+1}}-a^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ $(a>0)$ 的和 $S=$________.

4．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$ 的敛散性________.（填写发散，条件收敛或绝对收敛）

5．将函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成正弦级数，则 $f(x)=$____________________.

6．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数为______________________.

7．已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=$________.

8．设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\leqslant x<0, \\ 0, & 0\leqslant x<\pi, \end{cases}$$

再设 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$________.

9．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n-1)!}x^{n-1}$ 的和函数$S(x)=$________.

10．设向量$\boldsymbol{a}$与向量$\boldsymbol{b}=(2,-1,2)$共线且满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-18$，则$\boldsymbol{a}=$________.

11．已知两条直线的方程分别为l_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1}$，$l_2$：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$，则过$l_1$且平行于$l_2$的平面方程为______________________.

12．球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与平面$x+z=a$的交线在xOy面上的投影曲线方程是________.

13．函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y(1+x^2)}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$在点$(0,0)$处是否连续_______.（填写连续或不连续）

14．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$________________.

15．$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-(x+y)}=$________________.

16. 函数$u=2xy-z^2$在点$A(2,-1,1)$处的梯度是______________________，在点A处沿点A指向点$B(3,1,-1)$方向的方向导数是___________________.

17．设由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的隐函数为$z=z(x,y)$，则$\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}=$_____.

18．设$z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中$f(t)$二阶可导，$g(u,v)$具有连续的二阶偏导数，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$______________，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=$_____________.

“数学分析（下）”期中试题 2 参考答案

1．$0<a<1$；2．$(-2,4)$；3．$1-a$；4．绝对收敛；

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x,\quad x\in(0,\pi)$；6．$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n,-1<x<1$；

7．8；8．$-\frac{\pi}{2}$；9．$\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2}$；10．$\boldsymbol{a}=(-4,2,-4)$；

11．$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0$ 或 $x-3y+z+2=0$；

12．$\varGamma$：$\begin{cases}x^2+y^2+(a-x)^2=R^2\\ z=0\end{cases}$ $(a>0)$；13．连续；14．2；15．0；

16．$(-2,4,-2)$，$\dfrac{10}{3}$；17．$\mathrm{d}z\Big|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$；

18．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1+yg_2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}+g_2+xyg_{22}$．

“数学分析（下）”期中试题 3

1．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 的敛散性__________________.

2．设 $a>1$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=$__________________.

3．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-(2n)!}{n(2n)!}x^{2n}$ 的和 $S(x)=$__________________.

4．判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi}{n-\ln n}$ 的敛散性________（绝对收敛，条件收敛，发散）.

5．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处展成泰勒级数为______________________________.

6．设 $\delta>0$，判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{x}{n}\right)$ 在区间 $[-\delta,\delta]$ 的一致收敛性________.

7．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n n}x^{2n+3}$ 的收敛域是________.

8．设 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，且它在 $[0,2]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S\left(\dfrac{31}{2}\right)=$________.

9．过点 $(1,1,1)$ 且平行于直线 $\begin{cases}2x-y-3z=0\\ x+2y-5z=1\end{cases}$ 的直线方程为________________________.

10．设 $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(p,-4,-5)$. 已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$______________.

11．设 $z=f(x,y)$ 由方程 $x+y+z=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______________.

12．函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $P_0(0,-1,2)$ 沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,\sqrt{2},1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=$________.

13．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=$________.

14．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=$________.

15．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f_x(0,0)=$________.

16．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 是否存在________.

17．向量值函数 $f(x,y)=(x^2-y^2, y\tan x)^{\mathrm{T}}$，在点 $(1,0)$ 处的导数 $Df(1,0)=$________.

18．设 $z=x^3f(xy,y)$，其中 f 有连续二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

19．设 $(3x^2y^2-2ax\sin y)\mathrm{d}x+(x^2\cos y+bx^3y)\mathrm{d}y$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，则 $a=$________，$b=$________.

20．使得函数 $w(x,y)=\int_{-1}^{1}(t^2+xt+y)^2\mathrm{d}t$ 取得最小值的点为________.

“数学分析（下）”期中试题 3 参考答案

1．收敛；2．0；3．$-1+\cos x+\ln(1+x^2)$，$x\in[-1,1]$；4．条件收敛；

5．$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$，$-1<x<3$；6．一致收敛；7．$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$；

8．1；9．$\dfrac{x-1}{11}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-1}{5}$；10．$(14,14,-14)$；11．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$；

12．$(3,0,12)\cdot\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{2}$；13．0；14．0；15．1；16．否；

17．$Df(1,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \tan 1\end{pmatrix}$；

18．$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3[f_1x+f_2]=x^4f_1+x^3f_2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}==4x^3f_1+x^4yf_{11}+3x^2f_2+x^3yf_{21}$；

19．$a=-1,b=2$；20．$\left(0,-\dfrac{1}{3}\right)$.

“数学分析（下）”期中试题 4

1．判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}}$ 的敛散性________.

2．若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=3$ 处条件收敛，则该级数在 $x=-6$ 处________.（绝对收敛，条件收敛，发散）.

3．幂级数 $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$ 的和 $S(x)=$____________.

4．判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$, $(a>0)$ 的敛散性________.

5．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数为____________________.

6．设 $\delta>0$，判断函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在区间 $[\delta,+\infty)$ 的一致收敛性________.

7．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2+1}(x+2)^n$ 的收敛域是________.

8．设 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，且它在 $[0,2]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2.\end{cases}$ 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的傅里叶级数的和函数为 $S(x)$，则 $S\left(\dfrac{19}{3}\right)=$________.

9．空间曲线 $\varGamma$：$\boldsymbol{r}(t)=\left(\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u, 2\sin t+\cos t, 1+\mathrm{e}^{3t}\right)$ 在 $t=0$ 处的法平面方程为____________________.

10．曲面 $z=2x^2+y^2$ 的与平面 $x+2y+z=0$ 平行的切平面方程为________.

11．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$，$\mathrm{e}^x=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ______________.

12．设函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(1,1)$ 处增加最快的方向 $\boldsymbol{l}=$________，$f(x,y)$

在 $P_0(1,1)$ 处沿这个方向的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)}=$ ______________________.

13．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,2)}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+y}}=$ ______________.

14．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}=$ ______________.

15．设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则此函数在 $(0,0)$ 点是否连续________，在 $(0,0)$ 点关于 x,y 的偏导数是否存在________.

16．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ________________.

17．向量值函数 $f(x,y)=(x^2+\sin y,2xy)^{\mathrm{T}}$ 的导数 $Df(x,y)=$ __________________.

18．设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=a$，$f_y(0,0)=b$．函数 $F(t)=\mathrm{e}^t f(t,f(t,t))$，则 $F'(0)=$ __________________.

19．设 $w=f(x+y+z,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}=$ ______________________.

20．函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点为________.

“数学分析（下）”期中试题 4 参考答案

1．发散；2．绝对收敛；3．$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$，$x\in(-\infty,+\infty)$；4．条件收敛；

5．$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}$

或 $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln(1+x)-\dfrac{1}{4}\ln(1-x)+\dfrac{1}{2}\arctan x-x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n+1}x^{4n+1}$；

6．一致收敛；7．$\left[-\dfrac{7}{3},-\dfrac{5}{3}\right]$；8．$\dfrac{1}{3}$；9．$x+2(y-1)+3(z-2)=0$；

10．$x+2y+z+\dfrac{9}{8}=0$；11．$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1-\dfrac{y}{x}f_2+\left[1-\dfrac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]f_3$；

12．$\boldsymbol{l}=(1,1)$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)}=\sqrt{2}$；13．$\mathrm{e}^2$；14．0；15．连续，偏导存在，不可微；

16．$\ln 2$；17．$J_f(x,y)=\begin{pmatrix}2x & \cos y\\ 2y & 2x\end{pmatrix}$；18．$F'(0)=a+b(a+b)$；

19．$\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_1+yzf_2$；$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}=f_{11}+y(x+z)f_{12}+xy^2zf_{22}+yf_2$；20．$(2,2)$．

"数学分析（下）"期中试题 5

1．母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为________________．

2．设直线 L：$\begin{cases}x+3y+2z=-1,\\ 2x-y-10z=-3,\end{cases}$ 平面 π：$4x-2y+z=2$，则它们的位置关系是________．（$L\,/\!/\,\pi$；L 在 π 上；$L\perp\pi$；L 与 π 斜交）

3．幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛域是________．

4．设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的正弦级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2}$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S(-1)=$________．

5．判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$ 的敛散性________（绝对收敛，条件收敛，发散）．

6．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$ 的敛散性________．

7．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ln^n 2}{2^n}+\dfrac{2^n}{n!}\right)$ 的敛散性________．

8．判断函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{2^n}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上的一致收敛性________．

9．设 $a>0$，则极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{3}{a^3}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right)=$________．

10．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数为____________________．

11．设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$ 所确定的隐函数，则全微分

$\mathrm{d}z =$ ________________________.

12．设 $z = f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1,\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2,\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3$，而函数 $\phi(x) = f(x, f(x,x))$. 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^3(x)\right|_{x=1} =$ ________.

13．设函数 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(1,1)$ 处沿着方向 $\boldsymbol{l} = (-1,1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)} =$ ______________；如果 $f(x,y)$ 在 $P_0(1,1)$ 处沿着方向 $\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 增加得最快，则 $\alpha =$ ________.

14．$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y} =$ ______________.

15．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} (1+\sin xy)^{\frac{y}{x}} =$ ______________.

16．设函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ 则此函数在 $(0,0)$ 点是否连续________，在 $(0,0)$ 点是否可微________.

17．设 $z = x^3 f(xy, y)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ______________________.

18．“ $f_x(x,y),\ f_y(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在且连续”是函数 $z = f(x,y)$ 在该点可微的________条件.（填写：必要，充分，充分必要，既非充分又非必要）.

19．函数 $f(x,y) = 2x^2 + ax + xy^2 + 2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则常数 $a =$________.

20．设函数 $z = z(x,y)$ 是由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所确定的隐函数，且 $z(1,1) = 1$，则 $z = z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处带 Peano 余项的一阶泰勒公式为________________________.

“数学分析（下）”期中试题 5 参考答案

1．$3y^2 - z^2 = 16$；2．$L \perp \pi$；3．$D = \left[-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$；4．$-\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$；5．条件收敛；

6．收敛；7．收敛；8．一致收敛；9．$s\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{a}{(a-1)^2}$；

10．$\dfrac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}} - 1\right)(x-1)^n$，$x \in (0,2)$；11．$\dfrac{2-x}{z+1}\mathrm{d}x + \dfrac{2y}{z+1}\mathrm{d}y$；12．51；

13．$\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=0$，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$；14．0；15．$e^{\pi^2}$；16．连续，不可微；

17．$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3[f_1x+f_2]=x^4f_1+x^3f_2$；$4x^3f_1+x^4yf_{11}+3x^2f_2+x^3yf_{12}$；

18．充分；19．-5；20．$z(x,y)=1+2(x-1)-(y-1)+o(\rho)$，$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$．

“数学分析（下）”期中试题 6

1．已知正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{m^2+n^2}\right)$________（填收敛或发散）．

2．已知$a>0$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{\ln\frac{1}{n}}$收敛，则$a$的取值范围是________．

3．设$\{a_n\}$是单调递减的正数列，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+a_n)^n}$ ______.（填收敛或发散）

4．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=$________．

5．幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n+2^n}x^{2n}$的收敛半径是________．

6．设幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n$在点$x=2$处发散，在点$x=-1$收敛，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域是________．

7．将函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$展开成x的幂级数为________________________．

8．将函数$f(x)=\ln(1-x-2x^2)$展开成x的幂级数为______________________．

9．设$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2}$是$f(x)$的傅里叶级数，则$S(7)=$____________________．

10．曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}\\ x=6\end{cases}$在点$(6,6,9)$的切线相对于$y$轴的倾角$\theta=$________．

11．设函数$f(x,y,z)$在区域D内处处可微，且$\forall M\in D$，均有$\mathrm{d}f(M)=0$，则可以断定f为______________________．

12．设 $z=\int_y^x e^{t^2}\mathrm{d}t$，$y=\sqrt{x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$ ____________________.

13．设函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，$f(x,0)=1$，$f_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$ ____________.

14．设函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}2x+y+\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$ ____________________.

15．设 $u=f(x,xy,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=$ ______________________.

16．函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为____________________.

17．设 $f(x,y)$ 在点 $P(1,1)$ 可微，且在 P 点附近有 $f(x,y)=f(1,1)+3(x-1)+4(y-1)+o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$，则 $f(x,y)$ 在点 $P(1,1)$ 处的所有方向导数的最大值为________.

18．设函数 $z=3axy-x^3-y^3$，且 (a,a) 为函数的极大值点，则 a 的取值范围是________.

16．设 $(ax^2y^2-2xy^2)\,\mathrm{d}x+(2x^3y+bx^2y+1)\,\mathrm{d}y$ 是函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 $a=$ __，$b=$ __.

19．由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $P(1,0,-1)$ 处的全微分是____________________.

20．设 $\begin{cases}x+y+z+z^2=0,\\ x+y^2+z^2+z^3=0,\end{cases}$ 则在点 $(-1,1,-1)$ 处，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$ ____________________.

“数学分析（下）”期中试题 6 参考答案

1．收敛；2．$a>\mathrm{e}$；3．收敛；4．4；5．$R=\sqrt{3}$；6．$\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$；

7．$\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right]x^n$，$(-1<x<1)$；8．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$，$x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$；

9．$\dfrac{1}{2}$；10．$\theta=\dfrac{\pi}{4}$；11．f 是常值函数；12．$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^x$；13．$f(x,y)=y^2+xy+1$；

14．$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}2+\dfrac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 2, & x^2+y^2=0\end{cases}$；15．$xf_3+x^2yf_{32}+x^2yzf_{33}$；16．$\dfrac{1}{2}$；17．5；

18．$a>0$；16．$a=3,\ b=-2$；19，$\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$；20．$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{3}$.

“数学分析（下）”期中试题 7

1．判别下列叙述的对错

（1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛. ________.

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\ (u_n>0)$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散. ________.

（3）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. ________.

（4）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛. ________.

（5）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$收敛. ________.

2．设$\lambda>0$为常数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\lambda+n}{n^2}$ ________.

（A）发散；　　（B）条件收敛；

（C）绝对收敛；　　（D）级数的敛散性与λ无关.

3．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$分别是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中全体正项与全体负项所构成的级数，则________.

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛；　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都发散；

（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散；　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

4．设有无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，则如下叙述正确的是________.

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$中至少有一个收敛；

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n b_n=1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$中至少有一个发散；

（C）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\infty$，则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

5．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n(1-3^n)}$ 的收敛域是______________.

6．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2^n+(-3)^n}$ 的收敛半径是______________.

7．函数 $\ln x$ 在点 $x=1$ 处的泰勒级数展开式为______________.

8．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数为____________________.

9．若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则它的收敛半径 R 满足______________.

10. 函数 $f(x)$ 的周期为 2π，它在 $[0,2\pi)$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\pi,\\ 1, & \pi\leqslant x<2\pi,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=-3\pi$ 处的值等于________.

11．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在的原因是 (x,y) 沿不同路径趋向于 $(0,0)$ 时的极限不同，试给出这样的两种路径：____________________.

12．设 $z=xy+xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 F 为可导函数，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ____________________.

13．设 $z=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{x}\right)$，且 $f(u,v)$ 可微，则 $\mathrm{d}z=$ ____________________.

14．设 $f(u,v)$ 具有连续的一阶偏导数，方程 $f(2x-3z,2y-z)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，则 $3z_x+z_y=$ ____________________.

15．设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f$，$\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________________.

16．二元函数 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $P(-1,1)$ 处沿________方向函数增长最快，且此时的增长率为__________________.

17．设 $f(x)$ 为连续函数，方程 $x^2+y^2+z^2=\int_x^y f(x+y-t)\mathrm{d}t$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，则

$z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=$ ________.

18．曲线 $x^2+z^2=10,\ y^2+z^2=10$ 在点 $P(1,1,3)$ 处的切线方程为________.

19．小王有 200 元钱，他决定用来购买数学光盘 x 张和习题练习册 y 本，若效用函数 $u(x,y)=\ln x+\ln y$，且每张光盘 8 元，每本练习册 10 元. 问如何分配他的 200 元才能达到最满意的效果？

“数学分析（下）”期中试题 7 参考答案

1．错、对、错、错、对；2．B，D（两个都对）；

3．B；4．B；5．$(-3,3]$；6．$\sqrt{3}$；7．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n\quad 0<x\leqslant 2$；

8．$S(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$；9．$R\geqslant 3$；10．$\dfrac{1}{2}$；

11．$y=0,\ x\to 0;\ y=-x+x^2,\ x\to 0$.（不唯一）；12．$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$；

13．$\mathrm{d}z=\left(\dfrac{1}{y}f_1-\dfrac{y}{x^2}f_2\right)\mathrm{d}x+\left(-\dfrac{x}{y^2}f_1+\dfrac{1}{x}f_2\right)\mathrm{d}y$　14．$3z_x+z_y=2$；

15．$y(f''(xy)+\varphi''(x+y))+\varphi'(x+y)$；16．$-3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j},\ 3\sqrt{2}$；

17．$-(x+y)+\dfrac{1}{2}(f(y)-f(x))$；18．$\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$；

19．他可以买 11 张光盘和 11 本练习册. 12 张光盘和 10 本练习册也算对.

四、“数学分析（下）”期末试题

“数学分析（下）”期末试题 1

一、填空

1．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处收敛，则此级数在 $x=-1$ 处________.（填发散，条件收敛，绝对收敛或收敛性不确定）.

2．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}=$ ________.

3．设$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$______________.

4．设曲线$x=t,\ y=-t^2,\ z=t^3$在某点P处的切线与平面$x+2y+z=4$平行，则点P的坐标为________________.

5．设$z=f(x,y)$是由方程$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$所确定的隐函数，则全微分$\mathrm{d}z=$______________________.

6．交换二次积分的次序$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x=$________________.

7．设L为沿上半圆周$x^2+y^2=a^2,\ y\geqslant 0$，从点$(a,0)$到点$(-a,0)$的一段曲线，则$\int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+2\left[2x+y\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]\mathrm{d}y=$__________________.

8．设$F(y)=\int_{a+y}^{b+y}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$，则$F'(y)=$_________________________.

9．向量场$\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$在点$P(1,0,1)$处的散度$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=$______________.

10．设(C)是$x^2+y^2=1$在第一象限内的一段，则$\int_{(C)}(1+y)\mathrm{d}S=$___________.

二、简答题

1．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$的和函数.

2．将$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$在$x=1$处展成泰勒级数.

三、设$w=f(x+y+z,xyz)$，$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial w}{\partial x}$及$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

四、设$f(x)$具有连续的二阶导数，满足条件$f(1)=1$，又积分$\int_{(C)}[\ln x-f(x)]\frac{y}{x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$与路径无关，求$f(x)$.

五、计算积分$\iint_S \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}$，其中$S$为柱面$x^2+y^2=R^2\ (R>0)$在第一卦限内介于$z=R$及$z=\sqrt{3}R$之间的部分.

六、计算$I=\iint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为曲面$z=x^2+y^2$介于两平面$z=0$及$z=1$部分的外侧.

七、求函数$f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$在圆域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值与最小值.

八、计算积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\ (0<a<b)$.

“数学分析（下）”期末试题 1 参考答案

一、1．绝对收敛；2．1；3．24；4．$(1,-1,1)$ 或 $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27}\right)$；5．$-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}\mathrm{d}x-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}\mathrm{d}y$；

6．$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；7．$2\pi a^2$；

8．$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{b+y}\right)\sin y(b+y)-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{a+y}\right)\sin y(a+y)$；9．6；10．$1+\frac{\pi}{2}$.

二、1．解：

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n=2\sum_{n=1}^{\infty}nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'-\frac{x}{1-x}$$

$$=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{x}{1-x}=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2+x}{(1-x)^2}，\quad |x|<1.$$

2．解：

$$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-1)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n，\quad -2<x<4；$$

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}(x-1)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n，\quad -3<x<5.$$

故

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right](x-1)^n，\quad -2<x<4.$$

三、解：令 $u=x+y+z$，$v=xyz$，则 $w=f(u,v)$．由链式法则

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+yzf_2，$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(f_1+yzf_2)=\frac{\partial f_1}{\partial z}+yf_2+yz\frac{\partial f_2}{\partial z},$$

而 f_1，f_2 仍为复合函数，故

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial z}=f_{11}+xyf_{12},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}=\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial z}=f_{21}+xyf_{22},$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}=f_{11}+xyf_{12}+yf_2+yzf_{21}+xy^2zf_{22}=f_{11}+y(x+z)f_{12}+xy^2zf_{22}+yf_2.$$

四、解：令 $P(x,y)=[\ln x-f(x)]\frac{y}{x}$，$Q(x,y)=f(x)$，因积分与路径无关，所以有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

由此得微分方程
$$f'(x)=(\ln x-f(x))\frac{1}{x}$$

即
$$f'(x)+\frac{1}{x}f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

解得
$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}(x\ln x-x+C).$$

由 $f(1)=1$得$C=2$，从而

$$f(x)=\frac{1}{x}(x\ln x-x+2).$$

五、解：由于曲面方程不含 z，所以将方程写为

$$x=\sqrt{R^2-y^2}.$$

易见 S 在 yOz 的投影为 D: $R\leqslant z\leqslant\sqrt{3}R$，$0\leqslant y\leqslant R$，且面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是

$$\iint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_D\frac{1}{R^2+z^2}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_R^{\sqrt{3}R}\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\left(\arctan\frac{Z}{R}\bigg|_{R}^{\sqrt{3}R}\right)\cdot\left(\arcsin\frac{Z}{R}\bigg|_{0}^{R}\right)=\frac{\pi^2}{24}.$$

六、解：补平面 $\Sigma_1: z=1,\ \ x^2+y^2\leqslant 1$，方向朝上，使其与曲面 Σ 构成闭曲面.

由高斯公式得

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v\\&=\iiint_V(3x^2+3y^2+(x^2+y^2))\,\mathrm{d}v\\&=4\iiint_V(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v\\&=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma_1}z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{(\sigma_{xy})}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad (\text{其中}(\sigma_{xy})\text{：}\ x^2+y^2\leqslant 1)\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\\&\quad\iint_{\Sigma_1}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

七、解：由 $\begin{cases}f_x=2x(1+2y)=0\\f_y=2(x^2+y)=0\end{cases}$ 得驻点 $M_1(0,0)$，$M_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$，$M_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$，且

$f(M_1)=0$，$f(M_2)=f(M_3)=\dfrac{1}{4}$.

在边界 $x^2+y^2=1$ 上有 $\overline{f}=1+2(1-y^2)y=1+2y-2y^3\quad(-1\leqslant y\leqslant 1)$.

由 $\dfrac{\mathrm{d}\overline{f}}{\mathrm{d}y}=2-6y^2=0$ 知 $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 比较 $\overline{f}(-1)=\overline{f}(1)=1$，$\overline{f}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=1+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，$\overline{f}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，可知 f 在 D 的边界上的最小值为 $1-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，最大值为 $1+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

从而，$f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的最大值为 $1+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，最小值为 0.

八、解：因 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 在区域 $x\geqslant 0$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，又积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 对 $a\leqslant y\leqslant b$ 是一致收敛的. 事实上，当 $x\geqslant 0$，$a\leqslant y\leqslant b$ 时有 $0<\mathrm{e}^{-xy}\leqslant\mathrm{e}^{-ax}$，而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 对 y 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

于是，由含参数积分公式得

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}.$$

“数学分析（下）”期末试题 2

一、填空

1．设常数 $\lambda>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\dfrac{\lambda}{n^2+x^2}\mathrm{d}x$ 是________（填发散，条件收敛，绝对收敛或收敛性不确定）.

2．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=$________________.

3．求与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}=$________.

4．设螺旋线 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$，$z=t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 在某 P 点处的切线与平面 $x+\sqrt{2}z-4=0$ 平行，则点 P 的坐标为______________.

5．设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$ 所确定的隐函数，则全微分 $\mathrm{d}z=$________________.

6．交换二次积分的次序 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$__________________.

7．设 L 为沿上半圆周 $x^2+y^2=ax,\ y\geqslant 0$，从点 $(a,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段曲线，则 $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-y)\,\mathrm{d}y=$________________.

8．设 $F(t)=\int_t^{t^2}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$，则 $F'(t)=$________________.

9．设向量场 $\boldsymbol{A}=-8z^2\boldsymbol{i}+(x^3+12)y\boldsymbol{j}+(-2x^2z^2)\boldsymbol{k}$，则旋度 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})=$________________.

10．设平面曲线 (C) 是上半圆 $y=\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\int_{(C)}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=$________________.

二、简答题

1．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数.

2．将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数.

三、设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

四、设由直线 $x+y=6$，x 轴及 y 轴所围成的闭区域为 D. 求二元函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在区域 D 上的最大值与最小值.

五、计算 $\iint\limits_S(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$，其中 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 及 $z=1$ 的部分.

六、计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

七、设 $f(\pi)=1$，试求 $f(x)$ 使曲线积分 $\int_{(C)}(\sin x-f(x))\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关.

八、计算积分 $I=\int_0^1\dfrac{\arctan x}{x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

“数学分析（下）”期末试题 2 参考答案

一、1．绝对收敛；2．$1-\sqrt{2}$；3．$(-4,2,-4)$；4．$\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 或 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$；

5．$\dfrac{2-x}{z+1}\mathrm{d}x+\dfrac{2y}{z+1}\mathrm{d}y$；6．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

7．$\dfrac{\pi a^2}{8}$；8．$-\int_t^{t^2}x^2\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x+2t\mathrm{e}^{-t^5}-\mathrm{e}^{-t^3}$；9．$4z(xz-4)\boldsymbol{j}+3x^2y\boldsymbol{k}$；10．$\pi$.

二、1．解：
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}\right)'$$
$$=\left(x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right)'=(x\mathrm{e}^{x^2})'=(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}，\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

2．解：
$$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}.$$
$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2+(x-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}(x-1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}，\quad -1<x<3；$$
$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-1)}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}，\quad -2<x<4.$$
故
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right](x-1)^n，\quad -1<x<3.$$

三、解：
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(xf_1+\frac{1}{x}f_2\right)=x^4f_1+x^2f_2，$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(x^4f_1+x^2f_2)$$
$$=4x^3f_1+x^4\left(yf_{11}-\frac{y}{x^2}f_{12}\right)+2xf_2+x^2\left(yf_{21}-\frac{y}{x^2}f_{22}\right)$$
$$=4x^3f_1+2xf_2+x^4yf_{11}-yf_{22}.$$

四、解：（第一步）求驻点.

令 $\begin{cases}f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0,\\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0,\end{cases}$ 得驻点 $(4,0)$，$(2,1)$．在 D 内只有一个驻点 $(2,1)$，且 $f(2,1)=4$.

（第二步）求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值.

在边界 $x=0(0\leqslant y\leqslant 6)$ 和 $y=0(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上 $f(x,y)=0$.

在边界 $x+y=6$ 上，将 $y=6-x$ 代入 $f(x,y)$ 中得

$$f(x,6-x)=x^2(6-x)\times(-2)=2x^2(x-6),$$

又令 $f_x(x,6-x)=4x(x-6)+2x^2=6x^2-24x=0$，可得 $x=0$ 或 $x=4$.

当 $x=4$ 时 $y=6-x\big|_{x=4}=2$，而 $f(4,2)=-64$.

比较后可知 $f(2,1)=4$ 是最大值，$f(4,2)=-64$ 是最小值.

五、解：S 在 xOy 平面上的的投影是 D：$x^2+y^2\leqslant 1$. 故

$$\begin{aligned}
&\iint_S (x^2+y^2)\,\mathrm{dS}\\
&=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma\\
&=\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma\\
&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

六、解：补平面 $\varSigma_1: z=0,\ x^2+y^2\leqslant a^2$，方向取下侧，使其与曲面 $\varSigma$ 构成闭曲面.

由高斯公式得

$$\begin{aligned}
&\oiint_{\varSigma+\varSigma_1} (x^3+z^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2x^2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+3y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iiint_V (3x^2+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}v\\
&=3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v\\
&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^4\sin\theta\,\mathrm{d}\rho=\frac{6\pi a^5}{5}.
\end{aligned}$$

而

$$\iint_{\varSigma_1}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$=\iint_{\Sigma_1} 3y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{(\sigma_{xy})} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (其中(\sigma_{xy})：x^2+y^2\leqslant a^2)$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}\rho=-\frac{3a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{3\pi a^4}{4},$$

所以
$$I=\frac{6\pi a^5}{5}-\left(-\frac{\pi 3a^4}{4}\right)=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{3\pi a^4}{4}.$$

七、解：令 $P(x,y)=[\sin x-f(x)]\dfrac{y}{x}$，$Q(x,y)=f(x)$．因积分与路径无关，所以有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$．

从而得微分方程 $f'(x)=\dfrac{1}{x}(\sin x-f(x))$，即 $f'(x)+\dfrac{1}{x}f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$．

解得
$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}(C-\cos x).$$

由 $f(\pi)=1$得$C=\pi-1$，从而 $f(x)=\dfrac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$．

八、解：
$$I=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}.$$

由于函数 $\dfrac{1}{1+x^2y^2}$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 上连续，且 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0,1]$ 上绝对可积，故上式可交换积分次序

$$I=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}. \tag{1}$$

令 $x=\cos t$ 可得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \tag{2}$$

将式（2）代入式（1），得

$$I=\int_0^1\frac{\arctan x}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\frac{\pi\mathrm{d}y}{2\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

“数学分析（下）”期末试题 3

一、填空

1．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}}{\ln\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}$ 的敛散性________.（填发散，条件收敛，绝对收敛或收敛性不确定）.

2．将 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数为________________________________.

3．设 $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(p,-4,-5)$.已知 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$________.

4．曲线 Γ：$\begin{cases} x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u, \\ y=2\sin t+\cos t, \\ z=1+\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的法平面方程为____________________.

5．已知函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases} x+y+z+2z^2=0 \\ x+y^2+z+z^3=0 \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$________.

6．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$________.

7．交换积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y=$________.

8．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}+x\left(\iint\limits_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right)^2$，其中 D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，则 $f(x,y)=$________.

9．设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $y=x$ 相交的圆周，其中 $a>0$，则 $\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s=$____________________.

10．已知向量场 $\boldsymbol{A}=(xy^2z^2,z^2\sin y,x^2\mathrm{e}^y)$，则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=$________.

二、简答题

1．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$ 的收敛区间及和函数.

2．设 $\varOmega$ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2-x^2-y^2$ 所围成的立体，求 $\varOmega$ 的表面积 S.

三、验证 $(2xy^2+x+2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，求出 $u(x,y)$，并计算积分

$$I=\int_{(1,1)}^{(0,0)}(2xy^2+x+2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y .$$

四、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left(xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

五、求曲面 $x^2+y^2+z^2=2a^2\ (z\geqslant 0,a>0)$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体体积.

六、设 S 为下半球面 $x^2+y^2+z^2=1\ (z\leqslant 0)$ 的下侧，计算

$$\iint\limits_{(S)}(z+xy^2)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2-xz)\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+x^3)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

七、将 12 分成三个正数 x,y,z 之和，使得 $u=x^3y^2z$ 为最大.

八、计算 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x\quad (p>0,b>a)$.

“数学分析（下）”期末试题 3 参考答案

一、1．发散；2． $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-1}{n!}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{(n+2)!}x^n,\ x\in(-\infty,+\infty),\ x\neq 0$；

3． $\{14,14,-14\}$；4． $x+2(y-1)+3(z-2)=0$；5． $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y-1}{1+3z^2-2y-8yz}$；

6． $\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$；7． $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$；8． $x+\dfrac{1}{2}$；

9． $2\pi a^2$；10． $\{x^2\mathrm{e}^y-2z\sin y,2x(y^2z-\mathrm{e}^y),-2xyz^2\}$.

二、1．解：收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}(n+1)=+\infty$，收敛区间为 $(+\infty,-\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$，则 $S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$.

令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$，则

$$\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=x\mathrm{e}^x,$$

所以 $$g(x)=(xe^{x})'=(x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

故 $$S(x)=x(x+1)\mathrm{e}^{x},\quad -\infty<x<+\infty.$$

2．解：曲面在 xOy 面上的投影为 $x^2+y^2=1$，故圆锥表面积

$$S_1=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi;$$

抛物面表面积

$$S_2=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1).$$

$$S=S_1+S_2=\sqrt{2}\pi+\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1).$$

三、解：令 $P=2xy^2+x+2,\ Q=2x^2y-y^2+3$．则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=4xy$， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=4xy$ 所以 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\forall(x,y)\in R^2$，因而 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

下面求原函数 $u(x,y)$.

方法一：偏积分法

只需求 $u(x,y)$，使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^2+x+2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^2y-y^2+3. \tag{2}$$

对式（1）两边关于 x 积分得

$$u=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+2x+\varphi(y), \tag{3}$$

再将式（3）两端对 y 求导并与式（2）比较得

$$\varphi'(y)=-y^2+3,$$

从而 $$\varphi(y)=-\frac{1}{3}y^3+3y+C.$$

代入式（3）得 $$u(x,y)=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}y^3+3y+C.$$

方法二：用线积分

设

$$\varPhi(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2xy^2+x+2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y,$$

取积分路径为：先沿 x 轴从 $O(0,0)$ 到点 $(x,0)$，再沿直线从 $(x,0)$ 到 (x,y)．于是由第二线性积分的计算法得

$$\begin{aligned}\varPhi(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(2xy^2+x+2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y+\\&\quad\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2xy^2+x+2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x(x+2)\mathrm{d}x+\int_0^y(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y\\&=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}y^3+3y.\end{aligned}$$

故原函数的一般形式为

$$u(x,y)=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}y^3+3y+C.$$

方法三：全微分法

$$\begin{aligned}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=(2xy^2+x+2)\mathrm{d}x+(2x^2y-y^2+3)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}\left(x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}y^3+3y\right),\end{aligned}$$

所以

$$u(x,y)=x^2y^2+\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}y^3+3y+C\,.$$

下面求计算积分 I.

$$I=u(x,y)\Big|_{(1,1)}^{(0,0)}=-6\frac{1}{6}\,.$$

四、解：
$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\,,\quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2.$$

五、解：$\varOmega$ 由锥面和球面围成，利用球面坐标求解.

由 $x^2+y^2+z^2=2a^2$ 可得 $r=\sqrt{2}a$， $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ，所以有 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

故构成Ω 的范围为$0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}a$，$0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

六、解：设 S_1：$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0\end{cases}$ 取上侧，则

$$\iint\limits_{S}=\oiint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}.$$

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{S\cup S_1}=\iiint\limits_{V}(y^2+x^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{2}{5}\pi,$$

$$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{D_{xy}}x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

$$\iint\limits_{S}=\oiint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}=\frac{2}{5}\pi-0=\frac{2}{5}\pi.$$

七、解：这是一个条件极值问题：求函数 $u=x^3y^2z$ 在条件 $x+y+z=12$ 下的极值.

设 $F(x,y,z,\lambda)=x^3y^2z+\lambda(x+y+z-12)$，则令

$$\begin{cases}F_x=3x^2y^2z+\lambda=0,\\ F_y=2x^3yz+\lambda=0,\\ F_z=x^3y^2+\lambda=0,\\ F_\lambda=x+y+z=12,\end{cases}$$

解得驻点 $(6,4,2)$.

故当 $x=6$，$y=4$，$z=2$ 时 u 取最大值，最大值为 $u_{\max}=6^3\cdot4^2\cdot2=6912$.

八、解：因为 $\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xy\mathrm{d}y$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}y.$$

由于 $\mathrm{e}^{-px}\cos xy$ 在 $[0,+\infty)\times[a,b]$ 上连续，$|\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}y|\leqslant\mathrm{e}^{-px}$ 及反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x$ 收敛，

由 M 判别法，含参量反常积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛.

因此，交换积分顺序，I 的值不变. 于是

$$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-px}\cos xy\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y=\arctan\frac{b}{p}-\arctan\frac{a}{p}.$$

“数学分析（下）”期末试题 4

一、填空

1．判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ 的敛散性________（填发散，条件收敛，绝对收敛或收敛性不确定）.

2．将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处展成幂级数为________________________.

3．已知 $|\boldsymbol{a}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与投影轴 u 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=$________________________.

4．曲线 $\Gamma:\begin{cases}x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u,\\ y=2\sin t+\cos t,\\ z=1+\mathrm{e}^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为________________________.

5．已知函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x+y+z+2z^2=0,\\ x+y^2+z+z^3=0\end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=$________.

6．$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x=$__________________.

7．交换积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{3-x}{2}}f(x,y)\mathrm{d}y=$____________________.

8．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 由 $y=0$，$y=x$，$x=1$ 所围成，则 $f(x,y)=$________________.

9．设 L 是圆心在原点，半径为 a 的圆周，则曲线积分 $\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}S=$________________.

10．已知向量场 $\boldsymbol{A}=-3xz^3\boldsymbol{i}-yz^3\boldsymbol{j}+f(z)\boldsymbol{k}$，且 $f(z)$ 可微，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$，$f(1)=1$，则 $f(z)=$______________.

二、简答题

1．设 $a>1$，求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\frac{3}{a^3}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$ 的值.

2．求 $I=\oint_{L^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是 xOy 面上的任一条包含原点 $O(0,0)$ 的简单光滑闭曲线，其方向取逆时针方向.

三、设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f\left(xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

四、求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)$ 的极值.

五、求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积，其中 $a>0$.

六、计算积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2xz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 被 $z=0$ 所截部分的下侧.

七、设函数 $f(x)$ 具有连续导数并且满足 $f(1)=3$．试求 $f(x)$，使曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}y\,f^2(x)\,\mathrm{d}x+x^2 f(x)\,\mathrm{d}y$ 在右半平面内与路径无关；并求当 A，B 两点坐标分别为 $(1,2)$，$(2,1)$ 时的曲线积分.

八、计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x\quad(0<a<b)$.

“数学分析（下）”期末试题 4 参考答案

一、1．绝对收敛；2． $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-1)^n$，$-1<x<3$；

3． 2；4． $\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$；5． $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{1-2y}{3z^2-4z}$；6． $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$；

7． $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)\mathrm{d}x$；8． $xy+\frac{1}{4}$；9． $f(z)=2\pi a^3$；10． $f(z)=z^4$.

二、1．解：设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n\ (-1<x<1)$，则原问题转化为求和函数在 $x=\frac{1}{a}$ 处的值.

而
$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

故所求值为
$$s\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

2．解：令 $P=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，则
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\neq(0,0).$$

由于 L 所围成的区域 D 中含 $O(0,0)$，$\dfrac{\partial P}{\partial y}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内除 $O(0,0)$外都连续，此时在 D 内作曲线l^+： $x^2+y^2=\varepsilon^2(0<\varepsilon<1)$，取逆时针方向，并假设 D^* 为 L^+ 及 l^- 所围成区域.
则
$$I=\oint_{L^+}-\oint_{l^+}+\oint_{l^+}=\oint_{L^++l^-}+\oint_{l^+}$$
$$\xlongequal{\text{格林公式}}\iint_{D^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_{x^2+y^2=\varepsilon^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi.$$

三、解：
$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v},\quad \frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}.$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=x^2+y^2.$$

四、解：（1）求驻点.

由
$$\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)+2x\mathrm{e}^{x-y}=0,\\ f_y(x,y)=-\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2)-4y\mathrm{e}^{x-y}=0,\end{cases}$$
得两个驻点 $(0,0)$，$(-4,-2)$.

（2）求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数.
$$f_{xx}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2),$$
$$f_{xy}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(2y^2-x^2-2x-4y),$$
$$f_{yy}(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4).$$

（3）讨论驻点是否为极值点.

在 $(0,0)$ 处，有 $A=2$，$B=0$，$C=-4$，$AC-B^2=-8<0$，由极值的充分条件知 $(0,0)$ 不是极值点，$f(0,0)=0$ 不是函数的极值.

在 $(-4,-2)$ 处，有 $A=-6\mathrm{e}^{-2}$，$B=8\mathrm{e}^{-2}$，$C=-12\mathrm{e}^{-2}$，$AC-B^2=8\mathrm{e}^{-4}>0$，而 $A<0$，由极值的充分条件知 $(-4,-2)$ 为极大值点，$f(-4,-2)=8\mathrm{e}^{-2}$ 是函数的极大值.

五、解：由对称性知 $S=4S_1$，其中 S_1 为所求球面在第一卦限的部分.

易见 S_1 的曲面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，S_1 在 xOy 面上的投影为 $D_1: x^2+y^2\leqslant ax,\ y\geqslant 0$. 故

$$S=4\iint_{D_1}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\mathrm{d}r=2\pi a^2-4a^2.$$

六、解：设 $\varSigma_1:\begin{cases}z=0,\\ x^2+y^2\leqslant 4,\end{cases}$ 取上侧，则

$$I=\iint_{\varSigma}+\iint_{\varSigma_1}-\iint_{\varSigma_1}=\oiint_{\varSigma+\varSigma_1}-\iint_{\varSigma_1}\xlongequal{\text{高斯公式}}-\iiint_{\Omega}3(x^2+y^2)\mathrm{d}V-\iint_{\varSigma_1}3y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\mathrm{d}\rho\int_0^{4-\rho^2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}z-0$$

$$=-6\pi\int_0^2\rho^3(4-\rho^2)\mathrm{d}\rho=-32\pi.$$

七、解：由 $\dfrac{\partial}{\partial x}[x^2f(x)]=\dfrac{\partial}{\partial y}[yf^2(x)]$ 可得 $2xf+x^2f'=f^2$，所以 $f'+\dfrac{2}{x}f=\dfrac{1}{x^2}f^2$.

设 $z=f^{-1}$，则得 $z'-\dfrac{2}{x}z=-\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f^{-1}=z=\dfrac{1}{3x}+Cx^2$，代入条件得 $C=0\Rightarrow f(x)=3x$.

从而

$$\int_{\overset{\frown}{AB}}yf^2(x)\,\mathrm{d}x+x^2f(x)\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{AB}}9x^2y\mathrm{d}x+3x^3\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2[9(3-x)x^2-3x^3]\,\mathrm{d}x=\int_1^2(27x^2-12x^3)\,\mathrm{d}x=18.$$

八、解：因为 $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$，所以

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

由于 $|\mathrm{e}^{-xy}\sin x|\leqslant \mathrm{e}^{-ax}$ 及反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$ 收敛，根据 M 判别法，含参量反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$，在$[a,b]$上一致收敛.

又被积函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}\sin x$ 在 $0\leqslant x<+\infty$，$a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，故交换积分顺序，积分 I 的值不变.

于是

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\arctan b-\arctan a\ .$$

“数学分析（下）”期末试题 5

一、填空

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n^{\alpha}}$ 收敛的充要条件是 α 满足不等式________________.

2．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{2n+1}$， $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{4}$，则该级数的收敛半径 $R=$________.

3．求与向量 $\boldsymbol{a}$=(2,−1,2)共线且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$=−18 的向量 $\boldsymbol{x}$=________________.

4．设 $\begin{cases}x^2+y^2-uv=0\\xy-u^2+v^2=0\end{cases}$ 确定隐函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$________________.

5．极限 $\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=$________.

6．设 $y\in[\alpha_0,+\infty)$ $(\alpha_0>0)$，判断含参量广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\arctan yx^2\,\mathrm{d}x$ 的一致收敛性________.

7．设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周，则 $\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$ ________.

8．交换积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$________________________.

9．曲线 $\varGamma: x=\int_0^t\mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u,\ y=2\sin t+\cos t,\ z=1+\mathrm{e}^{3t}$，在 $t=0$ 处的切线方程为________.

10．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=\frac{1}{2}+x\left(\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2$，其中 $D:0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，则 $f(x,y)=$____________________.

二、简答题

1．将函数 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$ 展开成麦克劳林级数.

2．计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x,\,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

三、已知方程 $\sin z-xyz=a$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

五、已知线积分 $\int_C (x+y\sin x)\mathrm{d}x+\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 可微，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，求 $f(x)$.

六、计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.

七、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$y(x)=\frac{1}{k}\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t$，其中 $x\in[a,b]$. 试证函数 y 满足微分方程 $y''+k^2y=f(x)$.

八、若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 收敛，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛.

“数学分析（下）”期末试题 5 参考答案

一、1．$\alpha>\frac{3}{2}$；2．$\frac{1}{2}$；3．$(-4,2,-4)$；4．$\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)}$；5．$\frac{\pi}{4}$；6．一致收敛；

7．$\frac{4\pi a^3}{3}$；8．$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；9．$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$；

10．$\frac{1}{2}+x$.

二、1．解：

$$\ln\sqrt{(1+x^2)}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}+\cdots\right)\quad(-1\leqslant x\leqslant 1);$$

又
$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^x [1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots]\mathrm{d}x$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

故

$$x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

2．解：令 $x = y$，则直线 $y = x$ 将 D 划分为两个区域：

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\}, \qquad D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\}.$$

$$\text{原式} = \iint_{D_1} \mathrm{e}^{\max\{x,\,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \mathrm{e}^{\max\{x,\,y\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{D_1} \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} \mathrm{e}^{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^x\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_0^1 y\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = 2 .$$

三、解：对方程 $\sin z - xyz = a$ 两边关于 x, y 求偏导得

$$\cos z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \quad \cos z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} - \left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

可得
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{\cos z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{\cos z - xy}.$$

又对方程 $\cos z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} - \left(xz + xy\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$，两边关于 x 求导，得

$$\left(-\sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \cos z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) - \left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \left(y\frac{\partial z}{\partial y} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0,$$

可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+z+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}}{\cos z-xy}=\frac{z\cos z+xyz}{(\cos z-xy)^2}+\frac{xyz^2\sin z}{(\cos z-xy)^3}.$$

四、解：设 $P(x,y,z)$ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上的一点，则 P 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$.

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$，

令

$$\begin{cases}F_x=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0,\\ F_y=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0,\\ F_z=\frac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0,\\ z=x^2+y^2,\end{cases}$$

易见 $\lambda\neq 0$，解得 $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{4},\ z=\frac{1}{8}$.

即得唯一驻点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$.根据题意距离的最小值一定存在，且必在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ 取得最小值，最小值为

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

五、解：令 $P(x,y)=x+y\sin x,\quad Q(x,y)=\frac{f(x)}{x}$. 因为积分与路径无关，所以有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

从而得微分方程

$$f'(x)-\frac{f(x)}{x}=x\sin x.$$

解得 $$f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int x\sin x e^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right)=x(-\cos x+C).$$

又由 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ 得 $C=\dfrac{2}{\pi}$，从而 $f(x)=x\left(-\cos x+\dfrac{2}{\pi}\right)$.

六、解：作取上侧的辅助面

$$\sum_1 : z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\leqslant h^2.$$

则 Σ 与 Σ_1 一起构成一个闭曲面，记它们围成的空间闭区域为Ω.

由高斯公式得

$$I=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{xy}}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^h\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi h^4=2\int_0^h z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z-\pi h^4$$

$$=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

七、证：令 $g(x,t)=f(t)\sin k(x-t)$，则 $g_x(x,t)=kf(t)\cos k(x-t)$ 及 $g_{xx}(x,t)=-k^2 f(t)\sin k(x-t)$ 都在$[a,b]\times[a,b]$上连续.

而

$$y'(x)=\int_a^x f(t)\cos k(x-t)\mathrm{d}t\text{，}$$

$$y''(x)=-k\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t+f(x).$$

故 $$y''+k^2y=-k\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t+f(x)+k\int_a^x f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t=f(x).$$

八、证明：由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n-u_{n-1}|$ 收敛，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n-u_{n-1}$ 收敛.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n-u_{n-1}$ 的部分和为 S_n，则

$$S_n=u_1-u_0+u_2-u_1+\cdots+u_n-u_{n-1}=u_n-u_0.$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=S+u_0$.

故存在常数 $M>0$，使得 $|u_n|\leqslant M$，因此 $|u_nv_n|\leqslant Mv_n$.

由$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$绝对收敛.

“数学分析（下）”期末试题 6

一、填空

1．设常数$\lambda>0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{\lambda}{n^2+x^2}\mathrm{d}x$是________（填发散，条件收敛,绝对收敛或收敛性不确定）.

2．将函数$5x^2\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$展开成关于$x$的幂级数为________________.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，则函数$f(x,y)$在（0, 0）沿方向$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向导数为________________.

4．设$F(t)=\int_t^{t^2}\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$，则$F'(t)=$________________.

5．设$y\in[\alpha_0,+\infty)$ $(\alpha_0>0)$，判断含参量广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\cos yx\,\mathrm{d}x$的一致收敛性________.

6．交换积分次序$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{8-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$________________.

7．设$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0, \\ xy-u^2+v^2=0 \end{cases}$确定隐函数$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y), \end{cases}$ 则$\dfrac{\partial v}{\partial x}=$________________.

8．设向量场$\boldsymbol{A}=-8z^2\boldsymbol{i}+(x^3+12)y\boldsymbol{j}+(-2x^2z^2)\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=$________.

9．设$\boldsymbol{a}=(3,-2,1),\boldsymbol{b}=(p,-4,-5)$．已知$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$________.

10．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$在xOy平面的上方部分,则$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=$________.

二、简答

1．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$的收敛域及和函数.

2．计算积分$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$.

三、已知方程 $\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、验证曲线积分 $\int_C (2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$，与路径无关，并求积分表达式的原函数.

五、设 Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2$ 介于 $z=1$ 及 $z=2$ 之间部分的上侧，求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

六、计算曲线积分 $\int\limits_{AMO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 AMO 为从点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

七、求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

八、若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n-na_{n+1}]$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

“数学分析（下）”期末试题 6 参考答案

一、1．绝对收敛；2． $5x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!},\quad x\in R$；3． $\cos\alpha+\sin\alpha$；

4． $\int_t^{t^2}-x^2\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x+2t\mathrm{e}^{-t^5}-\mathrm{e}^{-t^3}$；5．一致收敛；

6． $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；7． $-\dfrac{yv-4ux}{2(u^2+v^2)}$；

8． $4z(xz-4)\boldsymbol{j}+3x^2y\boldsymbol{k}$；9． $\{14,14,-14\}$；10． $2\pi a^4$.

二、1．解：收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}(n+1)=+\infty$，收敛域为 $(+\infty,-\infty)$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}x^n$，则 $S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$.

令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$，则 $\int_0^x g(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n-1)!}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}=x\mathrm{e}^x$.

所以 $g(x)=(x\mathrm{e}^x)'=(x+1)\mathrm{e}^x$，故 $S(x)=x(x+1)\mathrm{e}^x$， $-\infty<x<+\infty$.

2．解：
$$\int_a^b x^y \mathrm{d}y=\left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_a^b=\frac{x^b-x^a}{\ln x},$$

可得
$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y.$$

因为 x^y 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续，所以交换积分顺序
$$I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

三、解：对方程 $\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$ 两边关于 x 及 y 求偏导，得
$$\cos(x+y)+\cos(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \cos(x+y)+\cos(y+z)\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

可得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\cos(x+y)}{\cos(y+z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\cos(x+y)}{\cos(y+z)}-1.$$

又对方程 $\cos(x+y)+\cos(y+z)\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$ 两边关于 x 求导，得
$$-\sin(x+y)-\sin(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\cos(y+z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

所以
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\sin(x+y)+\sin(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot(1+\dfrac{\partial z}{\partial y})}{\cos(y+z)}$$
$$=\frac{\sin(x+y)+\sin(y+z)\left(\dfrac{\cos(x+y)}{\cos(y+z)}\right)^2}{\cos(y+z)}.$$

四、解：设 $P(x,y)=2x\cos y-y^2\sin x,\quad Q(x,y)=2y\cos x-x^2\sin y$，则
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\sin y-2y\sin x,$$

所以曲线积分与路径无关.

方法一：凑微分法.

设原函数为$u(x,y)$. 由于

$$(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2\cos y+y^2\cos x),$$

故
$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x.$$

方法二：用线积分.

设
$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y.$$

取积分路径为：先沿x轴从$O(0,0)$到点$(x,0)$, 再沿直线从$(x,0)$到(x,y). 则

$$\begin{aligned}u(x,y)=&\int_{(0,0)}^{(x,0)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y+\\&\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2x\cos y-y^2\sin x)\mathrm{d}x+(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y\\=&\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\cos x-x^2\sin y)\mathrm{d}y=x^2\cos y+y^2\cos x.\end{aligned}$$

方法三：偏积分法.

设原函数为$u(x,y)$. 由题意知

$$u_x=(2x\cos y-y^2\sin x),\ u_y=2y\cos x-x^2\sin y.$$

对$u_x=(2x\cos y-y^2\sin x)$两边关于x积分，知

$$u=x^2\cos y+y^2\cos x+\varphi(y).$$

对$u=x^2\cos y+y^2\cos x+\varphi(y)$两边关于$y$求偏导

$$u_y=-x^2\sin y+2y\cos x+\varphi'(y)$$

并与$u_y=2y\cos x-x^2\sin y$相比较知

$$\varphi'(y)=0,\Rightarrow\varphi(y)=C.$$

故
$$u(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C.$$

五、解：作取下侧的辅助面 $\Sigma_1: z=1,\ D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1$.

则Σ与Σ_1一起构成一个闭曲面, 记它们围成的空间闭区域为Ω.

由高斯公式得

$$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}\right)(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint\limits_{D_{xy}}(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

六、解：在 Ox 轴上连结 $O(0,0)$与点 $A(a,0)$，这样,便构成了封闭的半圆形 $AMOA$.

由于

$$\int_{OA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=0.$$

从而

$$\int_{AMO}=\int_{AMOA}-\int_{OA}=\oint_{AMOA}.$$

另一方面，利用格林公式可得

$$\int_{AMOA}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax,y>0}m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^2}{8},$$

故

$$\int_{AMO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

七、解：设 $P(x,y,z)$ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上的一点，则 P 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2),$$

令

$$\begin{cases}F_x=\dfrac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x=0,\\ F_y=\dfrac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y=0,\\ F_z=\dfrac{1}{3}(x+y-2z-2)(-2)+z=0,\\ z=x^2+y^2,\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{1}{4},y=\dfrac{1}{4},z=\dfrac{1}{8}$. 即得唯一驻点$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8}\right)$.

根据题意距离的最小值一定存在,且必在$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$取得最小值，最小值为

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

八、证明：设级数$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n-na_{n+1}]$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和分别为$\sigma_n$和$S_n$. 则

$$\sigma_n=(2a_1-a_2)+(3a_2-2a_3)+\cdots+[(n-1)a_n-na_{n+1}]=2S_n-na_{n+1},$$

即
$$S_n=\frac{1}{2}[\sigma_n+na_{n+1}].$$

由于级数$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n-na_{n+1}]$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$存在.

又据题中条件$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，知$\lim\limits_{n\to\infty}na_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$（$n+1$）$a_{n+1}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，故$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

“数学分析（下）”期末试题 7

一、填空

1．已知向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 两两互相垂直，且$|\boldsymbol{p}|=1,|\boldsymbol{q}|=2,\ |\boldsymbol{r}|=3$，则向量$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}$的模为________.

2．设函数$z=f(x,y)$满足$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, f(x,0)=1, f_y(x,0)=x$，则$f(x,y)=$________________.

3．函数$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点$M(1,1,1)$处沿曲面$2z=x^2+y^2$在该点的外法线方向的方向导数是________________.

4．曲线$\begin{cases}y=2x,\\ z=3x^2+y^2\end{cases}$在点$M(1,2,7)$处的切线方程为________________.

5．设$F(t)=\int_{\sin t}^{\cos t}\mathrm{e}^{t\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，则$F'(t)=$________________.

6．设$y\in[\alpha_0,+\infty)$ $(\alpha_0>0)$，判断含参量广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\frac{\sin xy}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$的一致收敛性________.

7．若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}\ln n}{n^\alpha}$收敛，则$\alpha$满足条件________.

8．已知$\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=$________.

9．交换积分的次序$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$________________.

10．设S为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\oiint\limits_S(x^2+yz)\mathrm{d}S=$________________.

二、将函数$f(x)=\dfrac{x}{1-3x+2x^2}$在$x_0=2$处展开成泰勒级数，并指出收敛域.

三、设函数$u=u(x,y)=f(r)$满足方程$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$，求$u=u(x,y)$.

四、设$a>0$，计算积分$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由双曲线$x^2-y^2=1$及直线$y=0,\ y=1$所围成的平面区域.

五、计算三重积分$\iiint\limits_\Omega(x+2y+3z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是球体$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$.

六、已知积分$\int_C y\varphi(y)\mathrm{d}x+\left[\dfrac{\mathrm{e}^y}{y}-\varphi(y)\right]x\mathrm{d}y$与路径无关，且$\varphi(1)=\mathrm{e}$，求：（1）$\varphi(x)$；（2）若$C$是从$A(0,1)$到$B(1,2)$的光滑曲线，求积分值.

七、计算曲面积分$\iint\limits_S(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中$S$是曲面$x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$的一部分，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为此曲面的外法线方向的方向余弦.

八、将$f(x)=x^2$在$[0,\pi]$上展开为余弦级数，并利用所得结果求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$及$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$的和.

“数学分析（下）”期末试题7参考答案

一、1．$\sqrt{14}$；2．y^2+xy+1；3．$\dfrac{1}{3}$；4．$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-7}{14}$；

5．$-\sin t\cdot\mathrm{e}^{t|\sin t|}-\cos t\cdot\mathrm{e}^{t|\sin t|}+\int_{\sin t}^{\cos t}\sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{t\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；6．一致收敛；7．$\alpha>2$；

8．$(3,2+2xz,3x^2y+x)$；9．$\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；10．$\dfrac{4}{3}\pi a^4$.

二、解：$f(x)=\dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}=-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-2x}$

$$=\frac{1}{1+(x-2)}-\frac{1}{3+2(x-2)}=\frac{1}{1+(x-2)}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(x-2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n(x-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right](x-2)^n,$$

收敛域为$|x-2|<1$，即$1<x<3$.

三、解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial y}=f'(r)\dfrac{y}{r}$；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(r)\frac{x}{r}\right]=\frac{f'(r)}{r}+\frac{x^2}{r^2}f''(r)+xf'(r)\cdot\left(-\frac{x}{r^2}\right)$$

$$=\frac{x^2}{r^2}f''(r)+\frac{y^2}{r^3}f'(r).$$

同法可得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}f''(r)+\frac{x^2}{r^3}f'(r).$$

代入给方程并化简得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0.$$

解此微分方程得$u=C_1\ln r+C_2$，从而

$$u=u(x,y)=C_1\ln\sqrt{x^2+y^2}+C_2.$$

四、解：$\displaystyle\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}}x^2y\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1 y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y$

$$=\frac{2}{15}(1+y^2)^{5/2}\Big|_0^1=\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1).$$

五、解：$\displaystyle\iiint_\Omega(x+2y+3z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\iiint_\Omega(x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$ （由对称性）

$$=\iiint_{\Omega}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\iiint_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+9\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{14}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{14}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{56}{15}\pi a^5.$$

六、解：（1）设 $P(x,y)=y\varphi(y)$， $Q(x,y)=\left[\frac{\mathrm{e}^y}{y}-\varphi(y)\right]x$.

因为积分与路径无关，所以应有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，从而得

$$\varphi'(y)+\frac{2}{y}\varphi(y)=\frac{\mathrm{e}^y}{y^2}.$$

解得其通解为 $$\varphi(y)=\frac{\mathrm{e}^y}{y^2}+\frac{c}{y^2}.$$

由 $\varphi(1)=\mathrm{e}$，得 $c=0$，所以 $\varphi(y)=\frac{\mathrm{e}^y}{y^2}$.

（2） $$\int_{(0,1)}^{(1,2)}\frac{\mathrm{e}^y}{y}\mathrm{d}x+\left[\frac{\mathrm{e}^y}{y}-\frac{\mathrm{e}^y}{y^2}\right]x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^2}{2}.$$

七、解：设平面圆域 $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant h^2,\\ z=h\end{cases}$ 的上侧为 S_1，则得封闭曲面 $S+S_1$，取外侧.

由高斯公式得

$$\iint_{S+S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=3\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{h}{\cos\varphi}}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{\frac{h}{\cos\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{6}{5}\pi h^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{9}{10}\pi h^5.$$

$$\iint_{S_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant h^2}x^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi h^5$$

所以
$$\iint_S (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \frac{9}{10}\pi h^5 - \pi h^5 = -\frac{1}{10}\pi h^5 .$$

八、解：将 $f(x)=x^2$ 作偶延拓,即 $f(x)=x^2, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

于是
$$b_n = 0(n=1,2,\cdots), \qquad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\sin nx}{n} + \frac{2x\cos nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^3}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{4}{n^2}(-1)^n \quad (n=1,2,\cdots) .$$

因为 $f(x)$ 的延拓函数连续, 所以有
$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi .$$

当 $x=\pi$ 时，得 $\pi^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

当 $x=0$ 时，得 $0 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} .$$

“数学分析（下）”期末试题 8

一、填空

1．设 $\boldsymbol{a}=(1,2,3), \boldsymbol{b}=(1,1,0)$. 若存在非负实数 β 使得 $\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}$ 垂直，则 β 的值为________.

2．设 $z=f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)\cos\sqrt{y+2}-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$ ，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} =$ ________.

3．函数 $u=(x-y)^2+(z-x)^2-2(y-z)^2$ 在点 $M(1,2,2)$ 处方向导数的最大值是________.

4．曲面Σ: $\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}+\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}=4$上点$M(\ln 2,\ln 2,1)$处的切平面方程为________.

5．设$F(t)=\int_{1+t}^{t^2}\mathrm{e}^{-t^2\sin x}\mathrm{d}x$，则$F'(t)=$________.

6．设$y\in[\alpha_0,+\infty)$ $(\alpha_0>0)$，判断含参量广义积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\arctan(x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x$的一致收敛性________.

7．设$a_n>0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^p\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\right)a_n\right]=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ________.

8．已知$\boldsymbol{A}=3y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})|=$________.

9．设空间区域Ω由曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$围成，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(y\sin x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

10．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，则$\iint\limits_{\Sigma}(y^2+2z^2+xy)\mathrm{d}S=$________.

二、设$u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$，将方程

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

化为以u,v为自变量的微分方程.

三、求曲面$\Sigma: x^2+y^2+z^2+xy+yz=a^2(a>0)$上$z$为最大、最小的点.

四、求由曲面$\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^4}{c^4}=1$所围成的立体的体积.

五、计算积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x\ (0<a<b)$.

六、设$f(x)$有连续的导数，$f(0)=-1$，且积分

$$\int_C[\tan x-f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，求：（1）$f(x)$；（2）若C是从$(0,0)$到$(1,1)$的光滑曲线，求积分值.

七、已知S是上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$　　$(a>0)$上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}(xz^2+\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x^2y+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

八、设 $f(x)$ 是以 $T=2$ 为周期的周期函数，且 $f(x)=2+|x| \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$．求 $f(x)$ 的Fourier级数，并利用所得结果求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ 的和.

“数学分析（下）”期末试题 8 参考答案

一、1． $\sqrt{7}$；2． -1；3． $2\sqrt{6}$；4． $x+y-(\ln 4)z=0$；

5． $F'(t)=2t\mathrm{e}^{-t^2\sin t^2}-\mathrm{e}^{-t^2\sin(1+t)}-\int_{1+t}^{t^2}2t\sin x\mathrm{e}^{-t^2\sin x}\mathrm{d}x$；

6．一致收敛；7． $p>2$；8． 0；9． $\frac{\pi}{8}$；10． $4\pi a^4$．

二、解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{\partial z}{\partial v}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{1+x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right)=-\frac{y}{(1+y^2)^{3/2}}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{1+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

三、解：问题化为方程 $x^2+y^2+z^2+xy+yz=a^2(a>0)$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的最值问题.

对 $x^2+y^2+z^2+xy+yz=a^2$ 两边分别关于 x,y 求导得
$$2x+2zz_x+y+yz_x=0\ ,\quad 2y+2zz_y+x+z+yz_y=0.$$

在上面两式中令 $z_x=0,\quad z_y=0$，则
$$\begin{cases}2x+y=0,\\ 2y+x+z=0,\end{cases}$$

解得 $y=-2x,z=3x$．

代入原方程解得驻点 $x=\frac{a}{\sqrt{6}},y=-\frac{2a}{\sqrt{6}}$ 或 $x=\frac{-a}{\sqrt{6}},y=\frac{2a}{\sqrt{6}}$.

当 $x=\dfrac{a}{\sqrt{6}},y=-\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$ 时， $z=\dfrac{3a}{\sqrt{6}}$；当 $x=\dfrac{-a}{\sqrt{6}},y=\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$ 时 $z=\dfrac{-3a}{\sqrt{6}}$.

所以曲面上 z 取得最大值的点为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{6}},\dfrac{-2a}{\sqrt{6}},\dfrac{3a}{\sqrt{6}}\right)$， z 取得最小值的点为 $\left(-\dfrac{a}{\sqrt{6}},\dfrac{2a}{\sqrt{6}},-\dfrac{3a}{\sqrt{6}}\right)$.

四、解：由广义柱面坐标，令 $x=ar\cos\varphi,y=ar\sin\varphi,z=z$. 则所围立体 Ω 的体积为

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abr\mathrm{d}r\int_{-c(1-r^2)^{1/4}}^{c(1-r^2)^{1/4}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi abc\int_0^1 r(1-r^2)^{1/4}\mathrm{d}r\ =4\pi abc\left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{5/4}\right]\Bigg|_0^1=\frac{8}{5}\pi abc.$$

五、解：因为
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y\ .$$

令 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}\sin x$， 则 $f(x,y)\in C([0,+\infty)\times[a,b])$， 且

$$|f(x,y)|\leqslant\mathrm{e}^{-ax},\forall y\in[a,b].$$

于是 $\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $a\leqslant y\leqslant b$ 上一致收敛，所以可交换积分顺序.

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\ =\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\arctan b-\arctan a.$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x=\arctan b-\arctan a\ .$$

六、解：（1）设 $P(x,y)=[\tan x-f(x)]\dfrac{y}{\cos^2 x}$， $Q(x,y)=f(x)$.

由于积分与路径无关，所以应有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即得方程

$$f'(x)+\frac{1}{\cos^2 x}f(x)=\frac{\tan x}{\cos^2 x}\ .$$

易求得上述微分方程满足初始条件 $f(0)=-1$ 的特解为

$$f(x)=\tan x-1\ .$$

（2）按折线段计算积分得

$$I=\int_0^1(\tan 1-1)\mathrm{d}y=\tan 1-1\ .$$

七、解：令 S_1 为曲面 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant a^2, \\ z=0 \end{cases}$ 的下侧，则

$$I=\iint\limits_{S+S_1}(xz^2+\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x^2y+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint\limits_{S_1}(xz^2+\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x^2y+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\stackrel{\Delta}{=} I_0-I_1 \quad .$$

$$I_0=\iint\limits_{S+S_1}(xz^2+\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x^2y+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{5}a^5 .$$

$$I_1=\iint\limits_{S_1}(xz^2+\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y+\sin z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x^2y+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(2x^2y+y^2\cdot 0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}2x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 .$$

所以
$$I=\frac{2\pi}{5}a^5 .$$

八、解：由于 $f(x)$ 为偶函数，所以展开成余弦级数.

$$b_n=0,(n=1,2,\cdots),\quad a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5 ,$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1 2\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\quad (n=1,2,\cdots) .$$

因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，所以

$$f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos[(2n-1)\pi x)],\quad x\in[-1,1].$$

在上式中令 $x=0$，得

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{24}.$$

“数学分析（下）”期末试题 9

一、填空

1．$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=$____________.

2．判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!3^n}{n^n}$ 的敛散性____________.

3．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}\ln n}{n^{\alpha}}$ 收敛，则 α 满足条件________.

4．设 $F(t)=\int_t^{t^2}e^{-tx^2}dx$，则 $F'(t)=$______________.

5．曲线 $\Gamma: x=\int_0^t e^u\cos u du,\quad y=2\sin t+\cos t,\quad z=1+e^{3t}$，在 $t=0$ 处的切线方程为____________________.

6．计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}dy\int_y^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x}{x}dx=$________.

7．设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$ 所确定的隐函数,则全微分 $dz=$____________________.

8．设 L 是沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧,则第二型曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化成第一型曲线积为____________________.

9．矢量场 $\boldsymbol{A}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2zx)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,1,2)$ 处的散度为________.

10．设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截得的圆周，则线积分

$\oint_{\Gamma}(xz+x^2)\,\mathrm{d}s=$__________________.

二、简答题

1．证明函数 $z=x^y\,(x>0,x\neq 1)$，满足方程 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z.$

2．计算 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\,\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中 L 为沿逆时针方向的上半圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2,y\geqslant 0$.

三、设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

四、求原函数 u，使得 $\mathrm{d}u=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$，并求积分 $\int_{(1,0)}^{(1,2)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$.

五、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

六、将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+6}$ 在 $x=1$ 处展成泰勒级数.

七、求函数 $f(x,y,z)=x+y+z+\sqrt{3}a$ 在条件 $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$ 下的极小值.

八、计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x\,(0<a<b)$.

“数学分析（下）”期末试题 9 参考答案

一、1．2；2．发散；3．$\alpha>2$；4．$-\int_t^{t^2}x^2\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x+2t\mathrm{e}^{-t^5}-\mathrm{e}^{-t^3}$；

5．$\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$；6．$\dfrac{1}{2}$；7．$\dfrac{2-x}{z+1}\mathrm{d}x+\dfrac{2y}{z+1}\mathrm{d}y$；8．$\int_L\dfrac{P+2xQ}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s$；

9．8；10．$\dfrac{2}{3}\pi a^3$.

二、1．证明： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$；

可得

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^{y}\ln x=2z.$$

2．解：令 $P=\mathrm{e}^{x}\sin y-2y,\quad Q=\mathrm{e}^{x}\cos y-2$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^{x}\cos y-2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\mathrm{e}^{x}\cos y.$$

取辅助线 $\overline{AB}: y=0,\ x:0\to 2a$. 由 Green 公式得

$$I=\oint_{L\cup\overline{AB}}-\int_{\overline{AB}}=\iint_{D}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=\pi a^{2}.$$

三、解：因为 $f(x)$ 为奇函数，所以

$$a_n=0，n=1,2,\cdots；$$

$$b_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[1+(-1)^{n+1}].$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1+(-1)^{n+1}]\sin nx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\right)\quad (x\neq k\pi, k=0,\pm1,\pm2\cdots)$$

四、解：设 $P(x,y)=x^{2}+2xy-y^{2}$，$Q(x,y)=x^{2}-2xy-y^{2}$，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$，所以曲线积分与路径无关.

方法一：凑全微分.

$$(x^{2}+2xy-y^{2})\mathrm{d}x+(x^{2}-2xy-y^{2})\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^{3}+x^{2}y-xy^{2}-\frac{1}{3}y^{3}\right).$$

故
$$u(x,y)=\frac{1}{3}x^{3}+x^{2}y-xy^{2}-\frac{1}{3}y^{3}+C.$$

方法二：用线积分.

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^{2}+2xy-y^{2})\mathrm{d}x+(x^{2}-2xy-y^{2})\mathrm{d}y+C.$$

取积分路径为：先沿 x 轴从 $O(0,0)$ 到点 $(x,0)$，再沿直线从 $(x,0)$ 到 (x,y)．于是

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+$$

$$\int_{(x,0)}^{(x,y)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

从而

$$I=\int_{(1,0)}^{(1,2)}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}x^3+x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C\Big|_{(1,0)}^{(1,2)}=-\frac{14}{3}.$$

五、解：取辅助面 $\Sigma_1: x^2+y^2\leqslant 4$，$z=0$ 的下侧，

设 Ω 为 Σ_1 与 Σ 围成的立体，则据高斯公式有

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int_0^2 r^3\cos\phi\sin\phi\mathrm{d}r=16\pi$$

又

$$\iint_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

故

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=16\pi.$$

六、解：$$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}.$$

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3+(x-1)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(x-1)}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(x-1)^n,\quad -2<x<4;$$

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{4+(x-1)}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{1}{4}(x-1)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n,$$

其中$-3<x<5$.

故
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right](x-1)^n,\quad -2<x<4.$$

七、证明：构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=(x+y+\sqrt{3}a)+\lambda((x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-a^2).$$

令

$$\begin{cases}F_x=1+2\lambda(x-a)=0,\\F_y=1+2\lambda(y-a)=0,\\F_z=1+2\lambda(z-a)=0,\\(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-a^2=0.\end{cases}$$

得驻点
$$x=y=z=a\pm\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

经验证当$x=y=z=a-\dfrac{a}{\sqrt{3}}$时取得极小值，极小值为$3\left(a-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{3}a=3a.$

八、解：因$f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$在区域$x\geqslant 0, a\leqslant y\leqslant b$上连续. 又对 $a\leqslant y\leqslant b$，积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$是一致收敛的. 事实上，当$x\geqslant 0, a\leqslant y\leqslant b$时有$0<\mathrm{e}^{-xy}\leqslant\mathrm{e}^{-ax}$. 而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$收敛，故积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$一致收敛.

于是

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x=\ln\frac{b}{a}.$$

“数学分析（下）”期末试题 10

一、填空

1．$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x+y}=$________________.

2．设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$，则 $f^{(100)}(0)=$________________.

3．设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$________.

4．函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=(1,1,-1)$ 的方向导数是________.

5．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n\ln(n+1)}x^n$ 的收敛域为________.

6．设函数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=$________________.

7．交换积分次序 $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x=$________________.

8．曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为________________________.

9．设曲线 $L:x^2+y^2=4$，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$________________.

10．设 $\varSigma$ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方部分的上侧，则第二型曲面积分 $\iint\limits_{\varSigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成第一型曲面积为________________.

二、简答题

1．设 $u=f(x,y)$ 为可微函数，求 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 在极坐标下的表达式.

2．判断含参量广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致收敛性，并说明理由.

三、将函数 $f(x)=\ln\left(x^2+x-2\right)$ 展成 $x-2$ 的幂级数.

四、求在平面$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$和柱面$x^2+y^2=1$的交线上与$xOy$平面距离最短的点.

五、已知线积分$\int_L xy^2\mathrm{d}x+y\phi(x)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$\phi(x)$具有连续的偏导数，$\phi(0)=0$．求$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\phi(x)\mathrm{d}y$.

六、证明：曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\quad(a>0)$上任意点处的切平面在三个坐标轴上的截距之和为常数.

七、设(S)为下半球面$x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0,z\leqslant 0)$的下侧，计算积分$\iint\limits_{(S)}(z+xy^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(yz^2-xz)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2z+x^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

八、设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$．证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

“数学分析（下）”期末试题 10 参考答案

一、1．0；2．100!；3．$f(2)$；4．$\dfrac{1}{3}$；5．$(-2,2]$；6．$\mathrm{e}^x yz^2-\dfrac{2\mathrm{e}^x yz(1+yz)}{1+xy}$；

7．$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y$；8．$\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$；9．$56\pi$；10．$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{4(x^2+y^2)+1}}\mathrm{d}S$.

二、1. 解：设$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则$u=f(r(x,y),\theta(x,y))$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2},\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$.

故
$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_r r_x+u_\theta\theta_x=\frac{x}{r}u_r+\frac{-y}{r^2}u_\theta,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=u_r r_y+u_\theta\theta_y=\frac{y}{r}u_r+\frac{x}{r^2}u_\theta;$$

所以
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

2．解：对$1\leqslant x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$有$\left|\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\dfrac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$，而$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$收敛，故由$M$判别法知$\int_1^{+\infty}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

三、解：$$f=\ln(x+2)(x-1)=\ln(x+2)+\ln(x-1).$$

而
$$\ln(x+2)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x-2}{4}\right)$$
$$=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n,\ -2<x\leqslant 6;$$

同理
$$\ln(x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n},\ \ 1<x\leqslant 3.$$

故
$$f(x)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\ \ 1<x\leqslant 3.$$

四、解：设 $P(x,y,z)$ 为平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上的一点，则 P 到 xOy 面的距离为 $d=|z|$.

构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases} F_x=\dfrac{\lambda}{3}+2x\mu=0, \\ F_y=\dfrac{\lambda}{4}+2y\mu=0, \\ F_z=2z+\dfrac{\lambda}{5}=0, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

解得 $x=\frac{4}{5},y=\frac{3}{5},z=\frac{35}{12}$ 或 $x=-\frac{4}{5},y=-\frac{3}{5},z=\frac{85}{12}$,即得驻点 $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5},\frac{85}{12}\right)$.

根据题意，距离的最小值一定存在，且必在 $\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$ 处取得最小值，最小值为 $d_{\min}=\frac{35}{12}$.

五、解：令 $P(x,y)=xy^2$， $Q(x,y)=y\phi(x)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)=2xy\ ,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}[y\phi(x)]=y\phi'(x).$$

因积分与路径无关，所以$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，从而得微分方程

$$y\phi'(x)=2xy\ .$$

解此微分方程得 $$\phi(x)=x^2+C.$$

由 $\phi(0)=0$ 得 $C=0$ 从而 $\phi(x)=x^2$，故

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\phi(x)\mathrm{d}y=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

六、证明：令 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$. 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任意一点, 那么

$$F_x\Big|_{P_0}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{P_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},F_y\Big|_{P_0}=\frac{1}{2\sqrt{y_0}},F_z\Big|_{P_0}=\frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

因而在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0\ ,$$

即 $$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

故切平面在三个坐标轴上截距之和为$\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=a$ （常数）.

七、解：取 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ z=0\end{cases}$ （上侧）. 则 $\iint\limits_S=\oiint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}$.

由高斯公式得

$$\oiint\limits_{S\cup S_1}=\iiint\limits_V(y^2+x^2+z^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a\rho^2\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{2a^5}{5}\pi.$$

而 $$\iint\limits_{S_1}=\iint\limits_{D_{xy}}x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

故 $$\iint\limits_S=\oiint\limits_{S\cup S_1}-\iint\limits_{S_1}=\frac{2a^5\pi}{5}.$$

八、证明：因为

$$\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n}[ka_k-(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[ka_k-(k+1)a_{k+1}]+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$$
$$=a_1-(n+1)a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}.$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，及$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

“数学分析（下）”期末试题 11

一、填空

1．极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}=$____________.

2．设$f\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=\csc^2x-\cos^2x$，则$f(x)=$________________.

3．函数$z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$的一阶偏导数$z_x(0,1)=$__________________.

4．已知$(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$为某二元函数$f(x,y)$的全微分，则$f(x,y)$__________________.

5．设$F(\alpha)=\int_1^{\alpha}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$，则$F'(\alpha)=$____________________.

6．在曲线$x=t,y=-t^2,z=t^3$的所有切线中与平面$x+2y+z=4$平行的切线共有________条.

7．设向量场$\boldsymbol{A}=-8z^2\boldsymbol{i}+(x^3+12)y\boldsymbol{j}+(-2x^2z^2)\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})=$_________.

8．设$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}v$，其中$f$为连续函数，$f'(0)$存在，而$f(0)=0$，$f'(0)=1$，则$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{F(t)}{\pi t^4}=$_________.

二、单选题

1．二元函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处四条性质：（1）连续，（2）两个偏导连续，（3）可微，（4）两个偏导存在，则（　　）.

（A） $(2)\to(3)\to(1)$；　　（B） $(3)\to(2)\to(1)$；

（C） $(3)\to(4)\to(1)$；　　（D） $(3)\to(1)\to(4)$.

2．设上半球 $V=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0\right\}$，则以下等式错误的是（　　）.

（A） $\iiint\limits_{(V)} x\,\mathrm{d}V=0$；　　（B） $\iiint\limits_{(V)} y\,\mathrm{d}V=0$；

（C） $\iiint\limits_{(V)} z\,\mathrm{d}V=0$；　　（D） $\iiint\limits_{(V)} xy\,\mathrm{d}V=0$.

3．函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-6y$, 则点（0,3）（　　）.

（A）不是驻点；　　（B）是驻点但非常极值点；

（C）是极小值点；　　（D）是极大值点.

4．设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$， $q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$， $n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是（　　）.

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛；

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛；

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性都不定；

（D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性都不定.

5．设 L_1 与 L_2 是包含原点在内的两条同向闭曲线， L_2 在 L_1 的内部，若已知 $\oint_{L_2}\dfrac{2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=k$（$k$ 为常数），则有 $\oint_{L_1}\dfrac{2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$（　　）.

（A）等于 k；　　（B）等于 $-k$；

（C）大于 k；　　（D）不一定等于 k 与 L_2 的形状有关.

三、简答题

1.（1）设 $A\subseteq R$ 为一点集，$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m):A\to R^m$ 为一元向量值函数. 证明：$\boldsymbol{f}$ 在 A 上连续等价于它的每个分量函数 f_k 在 A 上连续 $(k=1,2,\cdots,m)$.

（2）计算线积分 $I=\int_C x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\,\mathrm{d}z$，其中 C 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线

段.

（3）当 $x>-1$ 时， $f(x)$ 连续并可微，且 $f(0)=\dfrac{6}{5}$，对半平面 $x>-1$ 上的任一闭曲线，恒有 $\oint_C (y-5ye^{-2x}f(x))\mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\mathrm{d}y=0$，求函数 $f(x)$.

2．设函数 f,g 有连续导数，且 $F=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$. 证明

$$x\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0.$$

3．要造一个容积等于 V 的长方体无盖水池，应如何选择水池的尺寸可使表面积最小.

4．设 Ω 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=2-x^2-y^2$ 所围成的立体，求 Ω 的体积 V 与表面积 S.

5. 计算曲面积分 $\iint\limits_S \dfrac{(x^2-yx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}+z}$，其中 S 是锥面 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}\,(1\geqslant z\geqslant 0)$ 的上侧.

6．讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性. 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

“数学分析（下）”期末试题 11 参考答案

一、1．0；2． $f(x)=x^2-3$；3．1；4． $y-y^2\sin x+x^2y^3$；

5． $\dfrac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha}+\int_1^{\alpha}\dfrac{1}{1+\alpha x}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)-\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha)$；

6．2 条；7． $4z(xz-4)\boldsymbol{j}+3x^2y\boldsymbol{k}$；8．1.

二、1．A；2．C；3．C；4．B；5．D.

三、1.（1）证明：任取 $x_0\in A$，则 $\boldsymbol{f}$ 在 x_0 点连续等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}(x_0)$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}(x_0)$ 等价于 $\lim\limits_{x\to x_0}f_k(x)=f_k(x_0)$ $(k=1,2,\cdots,m)$，即每个 $f_k(x)$ $\boldsymbol{f}$ 在 x_0 点连续 $(k=1,2,\cdots,m)$.

（2）解：AB 的直线方程为 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.

其参数方程为

$$x=3t,y=2t,z=t,\text{其中 } t \text{ 从 1 到 0}.$$

所以
$$I=\int_C x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$$
$$=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2 2t]\mathrm{d}t$$
$$=87\int_1^0 t^3\,\mathrm{d}t=-\frac{87}{4}.$$

（3）解：因为
$$\oint_C (y-5y\mathrm{e}^{-2x}f(x))\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-2x}f(x)\mathrm{d}y=0,$$

所以$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即
$$-2\mathrm{e}^{-2x}f(x)+\mathrm{e}^{-2x}f'(x)=1-5\mathrm{e}^{-2x}f(x),$$

所以
$$f'(x)+3f(x)=\mathrm{e}^{2x},$$

解得
$$f(x)=\mathrm{e}^{\int -3\mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-3x},$$

又由 $f(0)=\dfrac{6}{5}$ 得 $C=1$，故
$$f(x)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-3x}.$$

2．证明：设 $u=\dfrac{x}{y}$，　$v=\dfrac{y}{x}$. 则
$$\frac{\partial F}{\partial x}=yf'(u)\frac{1}{y}+g(v)+xg'(v)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$
$$=f'(u)+g(v)-\frac{y}{x}g'(v),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''(u)\frac{1}{y}+g'(v)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{y}{x^2}g'(v)+\frac{y^2}{x^3}g''(v)$$
$$=\frac{1}{y}f''(u)+\frac{y^2}{x^3}g''(v),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f''(u)\left(-\frac{x}{y^2}\right)+g'(v)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}g'(v)-\frac{y}{x}g''(v)\frac{1}{x}$$
$$=-\frac{x}{y^2}f''(u)-\frac{y}{x^2}g''(v),$$

故，整理可得 $$x\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0.$$

3．解：设水池的长为 x，宽为 y，高为 z，则水池的表面积为
$$S(x,y,z)=xy+2xz+2yz \quad (x>0,y>0,z>0).$$

本题是在条件 $xyz=V$ 下，求 S 的最大值.

作函数 $$L(x,y,z)=xy+2xz+2yz-\lambda(xyz-V).$$

解方程组 $$\begin{cases} L_x=y+2z+\lambda yz=0, \\ L_y=x+2z+\lambda xz=0, \\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0, \\ L_\lambda=xyz-V=0, \end{cases}$$

得唯一可能的极值点$\left(\sqrt[3]{2V},\ \sqrt[3]{2V},\ \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}\right)$.

由问题本身可知 S 一定有最小值，所以表面积最小的水池的长和宽都应为$\sqrt[3]{2V}$，高为 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$.

4．解： $$V=\iiint_V \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{2-r^2}\mathrm{d}z=\frac{5}{6}\pi.$$

圆锥表面积
$$S_1=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\pi;$$

抛物面表面积
$$S_2=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1),$$

故 $S=S_1+S_2=\sqrt{2}\pi+\frac{1}{6}\pi(5\sqrt{5}-1).$

5．解：补上曲面：$S_1:x^2+y^2\leqslant 1,z=0$，取下侧.
$$I=\iint_S\frac{(x^2-yx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}+z}$$
$$=\iint_S(x^2-yx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S+S_1}(x^2-yx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\iint_{S_1}(x^2-yx)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-zx)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{\Omega}(2x-y+2y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0$$
$$=\iiint(2x+y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

再用柱面坐标得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r}(2r\cos\theta+r\sin\theta+2)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r}r(2\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}z+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{1-r}\mathrm{d}z$$
$$=4\pi\int_0^1(r-r^2)\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}.$$

6．解：
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}.$$
$$\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{2n}\left(n\to\infty\right).$$

因此绝对值级数发散.

而 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)=0$，所以由莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ 收敛.

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 为交错级数，易见也 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛.

由收敛级数性质知原级数收敛.故原级数条件收敛.

“数学分析（下）”期末试题 12

一、填空

1．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{\cos x-\sin y}=$____________.

2．设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

3．已知曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 的切线平行于平面 $x+y+\frac{1}{3}z=4$, 则切点的坐标是________.

4．判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln^n 2}{2^n}+\frac{2^n}{n!}\right)$ 的敛散性________.

5．极限 $\lim_{a\to 0}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}=$________.

6．交换积分顺序 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y=$________________.

7．设 L 为正方形边界 $|x|+|y|=1$，则 $\oint_L \frac{\mathrm{d}s}{|x|+|y|}=$________________.

8．设 $(xy^2-y\sin x)\mathrm{d}x+(x^2y+\cos x)\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面上是某个二元函数 u 的全微分，则 $u(x,y)$ 为________________.

二、单选题

1．下列级数中，属于条件收敛的是（　　）.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n}$；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{n^n}$；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$；　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$.

2．函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $A(1,2)$处沿 A 指向点 $B(2,\ 2+\sqrt{3})$ 方向的方向导数为（　　）.

（A）$\frac{1}{4}$；　　（B）$1+2\sqrt{3}$；　　（C）$1-2\sqrt{3}$；　　（D）$-\frac{1}{4}$.

3．设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零；　　（B）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零；

（C）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零；　　（D）$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

4．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处四条性质：（1）连续，（2）两个偏导连续，（3）可微，（4）两个偏导存在，则（　　）.

（A）（2）→（2）→（1）;　　（B）（3）→（2）→（1）;

（C）（3）→（4）→（1）;　　（D）（3）→（1）→（4）.

5．设上半球 $V=\left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0\right\}$，则以下等式错误的是（　　）.

（A）$\iiint\limits_{(V)} x\,\mathrm{d}V=0$；（B）$\iiint\limits_{(V)} y\,\mathrm{d}V=0$；（C）$\iiint\limits_{(V)} z\,\mathrm{d}V=0$；（D）$\iiint\limits_{(V)} xy\,\mathrm{d}V=0$.

三、简答题

1．（1）计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D: $x^2+y^2\leqslant 2x$.

（2）确定 λ 的值,使曲线积分 $\int\limits_{C}\left(x^2+4xy^{\lambda}\right)\mathrm{d}x+\left(6x^{\lambda-1}y^2-2y\right)\mathrm{d}y$ 在 xOy 平面上与路径无关. 当起点为 $(0,0)$，终点为 $(3,1)$ 时，求此曲线积分的值.

（3）将函数 $f(x)=\dfrac{\pi}{2}(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成正弦级数.

2．将函数 $f(x)=\ln(x+2)$ 展成 $x-2$ 的幂级数.

3．设方程组 $\begin{cases} xu-yv=0\\ yu+xv=1\end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

4．求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 的极值.

5．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\left(z^2+1\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(9-z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2+1\ \ (1\leqslant z\leqslant 2)$，取下侧.

6．设级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{k+1}$ 在 $[0,1]$ 上收敛，其和函数为 $f(x)$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

“数学分析（下）”期末试题 12 参考答案

一、1． 2；2． $(-2,4)$；3． $(-1,1,-1)$；4．收敛；5． $\dfrac{\pi}{4}$；

6． $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x$；7． $4\sqrt{2}$；8． $\dfrac{x^2y^2}{2}+y\cos x$.

二、1．D；2．B；3．A；4．A；5．C

三、1．（1）解：作极坐标变换 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$，有

$$\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\cos\theta}(\cos\theta+\sin\theta)r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\pi.$$

（2）解：由条件得 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即 $4\lambda xy^{\lambda-1}=6(\lambda-1)x^{\lambda-2}$，$\lambda=3$.

$$\int_{(0,0)}^{(3,1)}\left(x^2+4xy^3\right)\mathrm{d}x+\left(6x^2y^2-2y\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{3}x^3-y^2+2x^2y^3\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(3,1)}=26.$$

（3）解：将函数进行奇的周期延拓，则

$$a_n=0\quad(n=0,1,\cdots);$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{n}[1-(-1)^n]\quad(n=1,2,\cdots),$$

故
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\sin(2n-1)x,\quad x\in(0,\pi).$$

2．解：
$$f=\ln(x+2)(x-1)=\ln(x+2)+\ln(x-1).$$

而
$$\ln(x+2)=\ln 4+\ln\left(1+\frac{x-2}{4}\right)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n,\quad -2<x\leqslant 6,$$

$$\ln(x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n},1<x\leqslant 3.$$

$$f(x)=\ln 4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\quad 1<x\leqslant 3.$$

3．解：方程组两边对 x 求导，并移项得

$$\begin{cases}x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial v}{\partial x}=-u,\\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=-v.\end{cases}$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{xv-yu}{x^2+y^2}.$$

4．解：（1）求驻点.

由 $\begin{cases}f_x(x,y)=2x=0,\\ f_y(x,y)=4y=0,\end{cases}$ 得驻点 $(0,0)$；

（2）求 $f(x,y)$ 的二阶偏导数.

$$f_{xx}(x,y)=2,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=4;$$

（3）讨论驻点是否为极值点.

在$(0,0)$处，有$A=2$，$B=0$，$C=4$，$AC-B^2=8>0$，由极值的充分条件知 $(0,0)$是极小值点，极小值为 0.

5．解：取平面Σ_1：$z=2$，取上侧. 则Σ与Σ_1构成封闭曲面，取外侧.

令Σ与Σ_1所围空间区域为Ω，由高斯公式，得

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(9-2^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{1-r^2}^{2}\mathrm{d}z-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}.$$

6．解：$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{k+1},x\in[0,1]$，由于级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$收敛，所以$\lim\limits_{k\to\infty}a_k=0$，因而$\{a_k\}$有界. 设$|a_k|\leqslant M(k=1,2,\cdots)$，则

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\frac{1}{n^{k+1}}\leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}.$$

当$n\geqslant 2$时，$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant M\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}=\frac{M}{n(n-1)}$.

又级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$收敛，由比较判别法知原级数绝对收敛，故原级数收敛.

“数学分析（下）”期末试题 13

一、填空题

1．设$D=\{(x,y)\,|\,x^2+(y-1)^2\leqslant\rho^2\}$，$f$为连续函数，则$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

2．设周期为 2 的函数$f(x)$在$[-1,1]$上的表达式为$f(x)=|x|$，它的傅里叶级数的和函数为$S(x)$，则$S(-5)=$________.

3．曲面$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$在点$M(2,1,0)$处的切平面方程为________________.

4．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的柯西收敛原理是________________________.

5．设$x^3+y^3+z^3=3xyz$，则$\mathrm{d}z=$________________.

6．设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=$________________.

7．平面曲线 $x=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{1}{2}\ln y$ 介于 $1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}$ 之间的一段弧的弧长等于________________.

8．级数 $x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots$ 的和函数是______________________.

9．设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$，则 $3f_x'(0,0)+f_y'(0,0)=$________________.

10．二元函数 $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点 $(-1,0)$ 的一阶泰勒公式为________.

二、设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y,y)$，$f$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、计算下面各题

1．计算 $I=\oint_C y^2\mathrm{d}s$，其中 C 为圆周 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ z=\sqrt{3}.\end{cases}$

2．计算二重积分 $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 所围的区域.

四、求下列积分的值

1．设 C 是由 $|y|=1-x^2\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 表示的正向曲线，求积分 $I=\oint_C\dfrac{2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}$ 的值.

2. 计算曲线积分 $\int_C\dfrac{x}{\pi}\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中曲线 C 为摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ $(a>0)$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$ 的一段有向弧.

五、求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的隐函数的极值.

六、设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$. (1) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 内连续;（2）计算积分 $\int_0^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x$.

七、设 S 是空间立体 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz,\ x^2+y^2\leqslant 3z^2$ 的整个表面外侧，计算 $I=\oiint\limits_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

八、(附加题). 证明 $\oiint\limits_S(x+y+z+\sqrt{3}a)^3dS\geqslant 108\pi a^5$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$.

“数学分析（下）”期末试题 13 参考答案

一、1．$\pi f(0,1)$；2．1；3． $x-2y=0$；

4．$\forall \varepsilon>0$, 存在正整数 N，当 $n>N$ 时，对任意的非负整数 p，均有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$；

5．$\dfrac{(yz-x^2)\mathrm{d}x+(xz-y^2)\mathrm{d}y}{z^2-xy}$；6．$\dfrac{2}{r}$；

7．$\dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$；8．$S(x)=\begin{cases}0,|x|<1,\\ 1,x=1\end{cases}$；9．$-5$；

10．$f(x,y)=13-10(x+1)-2y+o(\rho^2)$，其中$\rho=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$．

二、解：令 $u=\mathrm{e}^x\sin y, v=y$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x\sin y\frac{\partial f}{\partial u}+0=\mathrm{e}^x\sin y\frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\mathrm{e}^x\sin y\frac{\partial f}{\partial u}+\mathrm{e}^x\sin y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$=\mathrm{e}^x\sin y\frac{\partial f}{\partial u}+\mathrm{e}^{2x}\sin^2 y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y\frac{\partial f}{\partial u}+\mathrm{e}^x\sin y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\mathrm{e}^x\cos y\frac{\partial f}{\partial u}+\mathrm{e}^x\sin y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\mathrm{e}^x\cos y+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)$$

$$=\mathrm{e}^x\cos y\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\sin 2y\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\mathrm{e}^x\sin y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.$$

三、1．解：C 的参数方程　$x=\cos t, y=\sin t, z=\sqrt{3}\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

于是
$$I=\oint_C y^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t=\pi.$$

2．解：令 $x=2r\cos\theta, y=3r\sin\theta$，则 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant 1$.

$$\iint_D x^2 \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 4r^2 \cos^2\theta \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{matrix} \right\| \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 4r^2 \cos^2\theta \cdot 6r\mathrm{d}r$$

$$= 24\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r = 6\pi .$$

四、1．解：设 $P = \dfrac{2x}{2x^2+y^2}, Q = \dfrac{y}{2x^2+y^2}$，当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时，有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{4xy}{(2x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{4xy}{(2x^2+y^2)^2} .$$

于是在不含原点的区域内积分与路径无关. 作半轴长充分小的椭圆 $C_\varepsilon : 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$，使之含于闭曲线 C 内部，且取顺时针方向，再设 C 与 C_ε 所围区域为 D，而 C_ε^+ 表则示逆时针方向，则

$$I = \oint_{C+C_\varepsilon} \frac{2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2} - \oint_{C_\varepsilon} \frac{2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}$$

$$= \iint_D 0\mathrm{d}\sigma + \oint_{C_\varepsilon^+} \frac{2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2} = \oint_{C_\varepsilon^+} \frac{2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2}$$

$$= \oint_{C_\varepsilon^+} \frac{2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{2x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon^+} 2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0 .$$

2．解：补上从 $A(2\pi a, 0)$ 到 $O(0,0)$ 直线段 AO .

于是
$$I = \oint_{C+C_1} \frac{x}{\pi}\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y - \int_{C_1} \frac{x}{\pi}\mathrm{d}x + (y-x)\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D -\mathrm{d}\sigma - \int_{2\pi a}^0 \frac{x}{\pi}\mathrm{d}x = \iint_D \mathrm{d}\sigma + \int_0^{2\pi a} \frac{x}{\pi}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \mathrm{d}t + 2\pi a^2 = 3\pi a^2 + 2\pi a^2 = 5\pi a^2 .$$

五、解：方程两边分别对 x 和 y 求导, 得

$$\begin{cases} 4x + 2zz_x + 8z + 8xz_x - z_x = 0, \\ 4y + 2zz_y + 8xz_y - z_y = 0. \end{cases} \tag{1}$$

令 $z_x = z_y = 0$，代入上述方程组，解得 $x = -2z, y = 0$，再代入原方程化得

$$7z^2 + z - 8 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -\frac{8}{7} .$$

于是求得驻点为 $P_1(-2,0), P_2\left(-\dfrac{8}{7},0\right)$.

又由方程组（1）可得

$$z_{xx}=\frac{2z_x^2+16z_x+4}{1-2z-8x},\quad z_{xy}=\frac{2z_xz_y+8z_y}{1-2z-8x},\quad z_{yy}=\frac{4+2z_y^2}{1-2z-8x}.$$

对驻点 $P_1(-2,0)$ 有 $A=\dfrac{4}{15},\quad B=0,\quad C=\dfrac{4}{15}$. 可得 P_1 是极小值点，极小值为 $z(P_1)=1$；

对驻点 $P_2\left(-\dfrac{8}{7},0\right)$ 有 $A=-\dfrac{4}{15},\quad B=0,\quad C=-\dfrac{4}{15}$.可得 P_2 是极大值点，极大值为 $z(P_2)=-\dfrac{8}{7}$.

六、解：（1）易求得幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$ 的收敛半径为 $R=\dfrac{1}{3}$，所以收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，而在收敛区间内幂级数的和函数连续，故 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ 内连续.

（2）
$$\int_0^{\frac{1}{8}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{8}}\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{8}}n3^{n-1}x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}x^n\Bigg|_0^{\frac{1}{8}}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n=\frac{1}{3}\frac{3/8}{1-3/8}=\frac{1}{5}.$$

七、解：由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rz,\\ x^2+y^2=3z^2,\end{cases}$ 得两曲面的交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{3}{4}R^2,\\ z=\dfrac{R}{2}.\end{cases}$ 由 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\Big/\dfrac{1}{2}R=\sqrt{3}$ 可得圆锥面 $x^2+y^2=3z^2$ 的半顶角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_V(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}v\qquad\text{（用球面坐标）}$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r=\cdots=\frac{63}{10}\pi R^5.$$

八、证明：球面 S 的球心为 (a,a,a). 设 S 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$ 的切平面的方程为

$$\pi\text{：}x+y+z=t.$$

由于球心到 π 的距离为 a，即得

$$d=\frac{|a+a+a-t|}{\sqrt{3}}=a \Rightarrow t=3a\pm\sqrt{3}a.$$

于是切平面为 π：$x+y+z=3a\pm\sqrt{3}a$.

因为$a>0$，可知球面S上任一点的坐标满足

$$x+y+z\geqslant 3a-\sqrt{3}a$$

即

$$x+y+z+\sqrt{3}a\geqslant 3a,$$

所以

$$\begin{aligned}&\oiint_S (x+y+z+\sqrt{3}a)^3\,\mathrm{d}S\\ \geqslant&\oiint_S (3a)^3\,\mathrm{d}S=27a^3\oiint_S \mathrm{d}S=27a^3\times 4\pi a^2=108\pi a^5.\end{aligned}$$

“数学分析（下）”期末试题 14

一、填空题

1．设$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x^2\}$，则二重积分$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

2．设周期为 4 的偶函数$f(x)$在$[0,2]$上的表达式为$f(x)=x$,它的傅里叶级数的和函数为$S(x)$，则$S(-5)=$________.

3．曲线$x^2+y^2=1, y^2+z^2=1$在点$P(1,0,1)$处的切线方程为________________.

4．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$的收敛域是________.

5．设$f(x,y)$连续，则交换积分次序后$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=$________________.

6．已知$\boldsymbol{A}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})=$________.

7．若$f(x,x^2)=x^3, f_x(x,x^2)=x^2-2x^4$，则$f_y(x,x^2)=$________________.

8．设$\varSigma$是球面$x^2+y^2+z^2=4$的外侧，则$\oiint\limits_{\varSigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=$________________.

9．函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 2, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$处________.

（A）无意义；　　（B）无极限；　　（C）有极限但不连续；　　（D）连续.

10．函数 $\ln x$ 在点 $x=1$ 处的泰勒展开式为________________________.

二、计算下面各题

1．设 $u=f(x^2+y^2+z^2), f$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2．计算 $I=\oint_C y^2\mathrm{d}s$，其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截出的圆周.

三、计算三重积分 $\iiint\limits_V\left(x+y+\dfrac{1}{z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2$，$x^2+y^2\leqslant 1$ 及 $z\geqslant 1$ 所围成.

四、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数.

五、求原点到曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=z\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的最长和最短距离.

六、设函数 $f(x,y)$ 有连续偏导数,曲线积分 $\int_C f(x,y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}f(x,y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}f(x,y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$ 对任意 t 都成立，求函数 $f(x,y)$.

七、计算曲面积分 $I=\iint\limits_S(y^2-2y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 与 $z=2$ 截下的那部分的外侧.

八、设函数 $f(x,y)$ 在有界区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)\}$ 上连续，$f(0,0)=0$，且 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，求 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}$.

“数学分析（下）”期末试题 14 参考答案

一、1．$\dfrac{1}{4}$；2．$S(-5)=1$；3．$\begin{cases}x=1\\ z=1\end{cases}$；4．（0,4）；5．$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$；

6．$\mathrm{grad}(2x+2y+2z)=\{2,2,2\}$；7．$x+x^3$；8．$\dfrac{128}{3}\pi$；

9．D；10．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$， $0<x\leqslant 2$．

二、1．解：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2 f''+2f'$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xyf''$．

2．解：由轮换对称性

$$I=\oint_C y^2\mathrm{d}s=\oint_C x^2\mathrm{d}s=\oint_C z^2\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_C(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_C 1\mathrm{d}s=\frac{2\pi}{3}$$

三、解：（法一）由奇偶性与对称性知：

$$I=\iiint_V\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{z}\pi\left(2-z^2\right)\mathrm{d}z=\pi\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

（法二）用柱坐标.

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_1^{\sqrt{2-r^2}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r\ln\sqrt{2-r^2}\mathrm{d}r=\pi\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

四、解：幂级数的收敛域为$[-1,1]$．记和函数为$s(x)$，则

$$\left[xs(x)\right]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,1).$$

再逐项求导
$$\left[xs(x)\right]''=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

因此
$$xs(x)=\int\left[\int\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=-\int\left[\ln(1-x)+c_1\right]\mathrm{d}x$$
$$=(1-x)\ln(1-x)+x+c_1x+c_2.$$

由$s(0)=0,s(1)=1$得$c_1=c_2=0$．

故由幂级数在收敛域内连续知

$$s(x)=\begin{cases}0,\ x=0\\1,\ x=1\\\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1,\ x\in[-1,0)\cup(0,1)\end{cases}$$

五、解：问题是求目标函数$d=x^2+y^2+z^2$在约束条件$x^2+y^2=z$和$x+y+z=1$下的最值.

用拉格朗日乘数法，令

$$F=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(x^2+y^2-z\right)+\mu\left(x+y+z-1\right).$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x=2x+2x\lambda+\mu=0,\\F_y=2y+2y\lambda+\mu=0,\\F_z=2z-\lambda+\mu=0,\\x^2+y^2-z=0,\\x+y+z-1=0.\end{cases}$$

由前两式得 $x=y$ 代入第 4 式得 $z=2x^2$，再代入第 5 式 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，得驻点 $M_1\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}\right),M_2\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3}\right)$.

因为实际问题有解,又 $d\left(M_1\right)=9-5\sqrt{3},d\left(M_2\right)=9+5\sqrt{3}$，故原点到所给曲线的最长距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

六、解：令 $P(x,y)=f(x,y),Q\left(x,y\right)=2xy$.

依题意有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$，所以

$$f(x,y)=y^2+c\left(x\right)\ .$$

又由于积分与路径无关，所以

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=\int_0^t c(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 2ty\mathrm{d}y=\int_0^t c(x)\mathrm{d}x+t\ .$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=\int_0^1 c(x)\mathrm{d}x+\int_0^t 2y\mathrm{d}y=\int_0^1 c(x)\mathrm{d}x+t^2\ .$$

上述两式右端相等，故

$$\int_0^t c(x)\mathrm{d}x+t=\int_0^1 c(x)\mathrm{d}x+t^2\ .$$

两边关于 t 求导，得 $c(t)=2t-1$，从而

$$f(x,y)=y^2+2x-1\ .$$

七、解：补充平面 $S_1:z=1\left(x^2+y^2\leqslant 1\right)$ 方向为下侧，$S_2:z=2\left(x^2+y^2\leqslant 1\right)$ 方向为上侧.

由高斯公式得

$$I_0=\oiint\limits_{S+S_1+S_2}\left(y^2-2y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+1\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V\left(2y+2z\right)\mathrm{d}v.$$

由对称性知 $\iiint\limits_V y\mathrm{d}v=0$．从而

$$I_0=2\iiint\limits_V z\mathrm{d}v=2\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_1^2\pi z^2=\frac{14}{3}\pi.$$

又

$$I_1=\iint\limits_{S_1}\left(y^2-2y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+1\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_D\left(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=-4\pi,$$

$$I_2=\iint\limits_{S_2}\left(y^2-2y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+1\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=9\iint\limits_D\left(+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=18\pi,$$

所以

$$I=I_0-I_1-I_2=\frac{14}{3}\pi-\left(-4\pi\right)-18\pi=-\frac{28}{3}\pi.$$

八、解：分母应用等价无穷小代换，分子交换积分次序，然后利用罗比达法则得

$$I=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}f(t,u)\mathrm{d}t}{\frac{x^4}{4}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\int_0^{x^2}f(t,x)\mathrm{d}t}{x^3}.$$

又由积分中值定理

$$I=\lim_{x\to0^+}\frac{-f\left(\xi,x\right)x^2}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{-f\left(\xi,x\right)}{x},\quad 0\leqslant\xi\leqslant x^2,$$

又由 $f\left(x,y\right)$ 在 $(0,0)$ 处可微，故

$$I=\lim_{x\to0^+}\frac{-f\left(\xi,x\right)}{x}=-\lim_{x\to0^+}\frac{f\left(0,0\right)+f_x\left(0,0\right)\xi+f_y\left(0,0\right)x+o\left(\sqrt{\xi^2+x^2}\right)}{x}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\left[f_x\left(0,0\right)\frac{\xi}{x}+f_y\left(0,0\right)+\frac{o\left(\sqrt{\xi^2+x^2}\right)}{x}\right]=-f_y\left(0,0\right).$$

第二篇　高等数学 A

一、“高等数学 A（上）”期中试题

“高等数学 A（上）”期中试题 1

1．已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，则 $f(x)$ 的定义域为________.

2．设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-xe^{tx}}{x+e^{tx}}$，则 $f(x)=$________.

3．函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$，则 $x=1$ 是________间断点.（第一类/第二类）

4．极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\cot x}=$________.

5．已知当 $x\to0$ 时，$\left(1-ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

6． $f(x)=e^{x^{100}}$，则 $f^{(100)}(0)=$________.

7． $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}=$________.

8．函数 $y=x^2-\ln x$ 的严格单调增区间为________.

9． $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}+2^{\ln2}$，则 $y'=$________.

10．对 $f(x)=x$，$g(x)=x^2$ 在区间 $[1,2]$ 上满足柯西中值定理的点 ξ 为________.

11． $f(x)=xe^x$ 的 4 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为________________________.

12．设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$________.

13．设 $e^{-y}=\cos(xy)-2x$，则 $dy|_{x=0}=$________.

14．曲线 $y=x-\dfrac{1}{x^2}$ 在点________处的法线与直线 $y=x$ 平行.

15．设 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=$________.

16．设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $f'(1)=$________.

17．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3}\cdots\sqrt[2^n]{3}\right)=$________.

18．已知 $y=x^{x^2}+2^{x^x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$____________________.

19．设 $y=f(x+y)$，其中 f 具有二阶导数，且 $y'\neq1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________________.

20．设 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且当 $h\to0$ 时，有 $f(1+\ln(1+2h))=2+4h+o(h)$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为____________________.

“高等数学 A（上）”期中试题 1 参考答案

1．$[-7,2)\cup(2,3)$；2．$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ -x, & x>0\end{cases}$；3．第一类；4．$\mathrm{e}^2$；

5．$\dfrac{3}{2}$；6．$100!$；7．$\dfrac{7}{12}$；8．$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$；

9．$-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$；10．$\dfrac{3}{2}$；

11．$f(x)=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^4}{3!}+\dfrac{(5+\xi)\mathrm{e}^{\xi}}{5!}x^5,\xi$ 介于 $0,x$ 之间；

12．$\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$；13．$2\mathrm{d}x$；14．$(-1,-2)$；15．0；

16．2；17．3；18．$y'=x^{x^2+1}(2\ln x+1)+2^{x^x}x^x(\ln x+1)\ln 2$；

19．$\dfrac{f''}{(1-f')^3}$；20．$y=2x$.

“高等数学 A（上）”期中试题 2

1．设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}$，则 $f(x)$ 的定义域为________.

2．常数 $n=$_______，使得 $x\to 0$ 时，$-\dfrac{1}{2}x^n$ 与 $\ln(1+x^3)-x^3$ 是等价无穷小.

3．$\lim\limits_{x\to+\infty}\arcsin\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=$________.

4．设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1-x\mathrm{e}^{tx}}{x+\mathrm{e}^{tx}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的________间断点（第一类/第二类）.

5．$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数，$f_+'(0)$ 存在，则 $f'(0)$ ________.（填存在、不存在或不一定存在）

6．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}=$ ________.

7．函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 的 4 阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式为____________________.

8．设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\ln\tan\dfrac{t}{2}+\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________________.

9．设 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=$________.

10．$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=$________.

11．已知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)=\dfrac{1}{x}$，则 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$________.

12．设 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\ (a>0,b>0)$，则 $y'=$________.

13．设 $y=(x^3+2)\cos 2x$，则 $y^{(20)}(0)=$________.

14．函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调增区间为________.

15．函数 $f(x)=x^3$ 在 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 ξ 为________.

16．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1-x^2}{\sin^4 3x}=$________.

17．曲线 $r=a\sin 2\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程为____________________.

18．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=$____________________.

19. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=1$，$f'(0)=1$，　$y=\mathrm{e}^{f(x)}+f(\mathrm{e}^x-1)$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

20．设 $f(x)=x^2|x|$，则 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数为 $n=$________.

“高等数学 A（上）”期中试题 2 参考答案

1．$(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$；2．6；3．$\dfrac{\pi}{6}$；4．第二类；5．存在；

6．$\dfrac{1}{6}$；7．$f(x)=x+x^2+\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^4}{3!}+\dfrac{(5+\xi)\mathrm{e}^{\xi}}{5!}x^5$，$\xi$ 介于 $0,x$ 之间；

8．$-\dfrac{1}{\sin^2 t\cos t}$；9．$(\ln 2-1)\mathrm{d}x$；10．$\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$；11．$-1$；

12．$\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}\right)$；13．$2^{21}$；14．$(-\infty,1)$ 和 $(2,+\infty)$；

15．$\xi=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$；16．$\dfrac{1}{162}$；17．$x+y=\sqrt{2}a$；18．$\dfrac{1}{2}$；

19．$\mathrm{e}+1$；20．2.

“高等数学 A（上）”期中试题 3

1．由摆线的参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

2．求曲线 $\rho=\cos 2\theta$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 所对应点处的切线方程______________.

3．已知 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^n f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\mathrm{d}x^n}=$______________.

4．如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=A$，则 $f'(0)=$________.

5．已知 $f(x)=\dfrac{x(x+2)}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 的第二类间断点为____________.

6．已知 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$________.

7．已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-f(x-1))$，则 $c=$____________.

8．设 $f(x)=x^2,F(x)=x^3$，则在 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理，则 $\xi=$____________.

9．写出 $f(x)=\sin(\sin(x))$ 含佩亚诺余项的麦克劳林展开式（到含 x^3 的项）____________.

10．设 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1+x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$____________.

11．当 $x\to 0$ 时，$e^{x^2}-\cos x$ 是 x 的__________阶无穷小量.

12．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[e^{2+\frac{1}{n}}+e^{2-\frac{1}{n}}-2e^2\right]=$ ________________.

13．已知 $f(x)$ 可导，函数 $y=e^{f\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+x^2}\right)}$ 的导数 $y'=$____________.

14．设 a 为实数，要使方程 $e^x-2x-a=0$ 有实根，则 a 满足条件____________.

15．设圆面积增加的速率为 $2\text{cm}/\min$，当圆半径为 1cm 时圆半径增加的速率为________.

16．曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的斜渐近线方程为____________.

17．设 $0<a<b<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{\sin a}{a},\dfrac{\sin b}{b},\dfrac{2}{\pi}$ 的大小关系为____________.

18．设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 $f(u)$ 可微，则 $dy=$____________.

19．设 $f(x)=\begin{cases}\ln(x^2+a^2), & x>1,\\ \sin[b(x-1)], & x\leqslant 1,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则 $a=$________，$b=$________.

“高等数学 A（上）”期中试题 3 参考答案

1．$-\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$；2．$y-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$；3．$-\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$；4．$\dfrac{A}{2}$；

5．$x=k,k\in Z,k\neq 0,k\neq -2$；6．$-2$；7．$\dfrac{1}{2}$；8．$\dfrac{2}{3}$；

9．$f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$ 或 $f(x)=x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$；10．$\sqrt{\ln(1+x)}$；11．2 阶；12．$e^2$；

13．$=\dfrac{x^3-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}}\cdot e^{f\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot f'\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+x^2}\right)$；14．$a\geqslant 2(1-\ln 2)$；

15．$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{\pi}\ \mathrm{cm^2/min}$；16．$y=x$；17．$\dfrac{\sin a}{a}>\dfrac{\sin b}{b}>\dfrac{2}{\pi}$；

18．$dy=e^{f(x)}\left[\dfrac{1}{x}f'(\ln x)+f(\ln x)f'(x)\right]dx$；19．$a=0,b=2$.

“高等数学 A（上）”期中试题 4

1．设 $f\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)=\csc^2 x-\cos^2 x$，则 $f(x)=$________.

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n}{n^n}=$________.

3．极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)=$________.

4．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=$________.

5．设 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}$，则 x=1 为 $f(x)$的________型间断点.

6．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[n]{1+\tan x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{2x\sin x}=$ ________.

7．设 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f'(x)=$____________________.

8．设 $y=x^{\tan x}$,则 $y'=$________.

9．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=$________.

10．曲线 $x=1+t^2,\ y=t^3$在$t=2$处的切线方程为 ________________.

11．设 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________.

12．设 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$ ________，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

13．函数 $f(x)=x^2\sin x$，则 $f^{(5)}(0)=$ ________.

14．函数 $f(x)=\cos x$ 的 5 阶带有拉格朗日余项的麦克劳林公式为________________.

15．函数 $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 的严格单调增区间为________.

16．函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的点 $\xi=$ ________.

17．设 $y=\arctan x$，则 $y'''(0)=$ ________________.

18．设 $f(x)$ 可导，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^2(x+3h)-f^2(x-h)}{h}=$ ________________.

19．当 $x\to0$ 时，$\sqrt{x^3+a}-\sqrt{a}\,(a\neq0)$ 为 x 的________阶无穷小量．

“高等数学 A（上）”期中试题 4 参考答案

1．$f(x)=x^2-3$；2．0；3．$\dfrac{2}{\pi}$；4．1；5．第二型；6．$\dfrac{1}{4n}$；

7．$f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ \text{不存在}, & x=0\end{cases}$；8．$y'=x^{\tan x}\left(\sec^2x\ln x+\dfrac{1}{x}\tan x\right)$；

9．$-\dfrac{1}{3}$；10．$y=3x-7$；11．$2e^2$；12．$\tan t$；$\dfrac{1}{at\cos^3t}$；13．$f^{(5)}(0)=-20$；

14．$\cos x=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\dfrac{\cos\xi}{6!}x^6$，$\xi$ 介于 $0,x$ 之间；15．$[1,\infty)$；

16．$\xi=\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$；17．$-2$；18．$8f(x)f'(x)$；19．3.

“高等数学 A（上）”期中试题 5

1．已知 $f(e^x-1)=x^2+1,(x>\ln2)$，则 $f(x)=$ ________________.

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+a^n+a^{2n}+a^{3n}}=$ ________ $(0\leqslant a\leqslant1)$．

3．极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\alpha}-x^{\beta}}{\ln x}=$________.

4．函数 $y=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 在 x=1 处是____________型的间断点.

5．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin 2x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$____________________ .

6．设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

7．设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$，则 $f'(x)=$____________________.

8．导数 $\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}\left(x^2\right)}=$____________________.

9．设 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=$____________________.

10．设 $x=t\mathrm{e}^{-t},y=\mathrm{e}^{t}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$____________________，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________________.

11．设 $f\left(x\right)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2007)$，则 $f'(0)=$____________________.

12．设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x\leqslant 0\\ \sin 2x+b, & x>0\end{cases}$，且 $f'(0)$ 存在，则 $a=$________.

13．函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{x}$ 在点 $x_0=1$ 处的佩亚诺余项的 2 阶泰勒公式为____________________.

14．已知方程 $x^{y^2}-x\mathrm{e}^{y}+\ln x=0$ 在点(1,0)附近确定了 y 是 x 的函数,则 $y_x(1,0)=$________.

15．设 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，则 $y'=$____________________.

16．曲线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 在 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为____________________.

17．函数 $f(x)=\left(\arctan\dfrac{x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 在(0,1)区间内单调________（增加还是减少）.

18．设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=f(t)-\pi \\ y=f(e^{3t}-1) \end{cases}$ 所确定，其中 f 可导，且 $f'(0)\neq 0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ ________．

19．当 $n\to\infty$ 时，给出序列 $a_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-1$ 的一个等价无穷小量________．

“高等数学 A（上）”期中试题 5 参考答案

1． $f(x)=\ln^2(1+x)+1$；2．1（夹逼定理）；3． $\alpha-\beta$；4．跳跃型；

5． e^{-1}；6．12；7． $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$；

8． $\dfrac{d\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{d\left(x^2\right)}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{2x^3}$；9．0；10． $\dfrac{e^{2t}}{1-t};\dfrac{(3-2t)e^{3t}}{(1-t)^3}$；11． $-2007!$；

12．2；13． $x^2e^x=e+3e(x-1)+\dfrac{7}{2}e+o\left((x-1)^2\right)$；14．0；

15． $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$；16． $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$；

17．减少；18．3；19． $\dfrac{1}{12n^2}$（提示：对 $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 作 3 阶泰勒展开）．

“高等数学 A（上）”期中试题 6

1．已知数列 $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$，对给定的 $\varepsilon=\dfrac{1}{16}$，存在 $N=$ ____使得当 $n>N$ 时，有 $|x_n-2|<\varepsilon$．

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n^2+\sin n}=$ ____________．

3．极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}-3x+1}{\sqrt{x^2+\cos x}}=$ ____________．

4．若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$____________.

5．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的间断点为________________.（要注明间断点的类型）

6．当 $x\to 0$ 时，$\sin 2x-2\sin x$ 是关于 x 的__________阶无穷小.（填写阶数）

7．已知 $y=x^{\sin\frac{1}{x}}\ (x>0)$，则 $y'=$________________________________.

8．若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f'(x)=$________________________.

9．若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有连续的一阶导数，$f'(e)=-2e^{-1}$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{d}{dx}f\left(e^{\cos\sqrt{x}}\right)=$_______.

10．极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}=$__________________.

11．已知 $\begin{cases}x=\ln\cos t,\\ y=\sin t-t\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=$__________，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______________.

12．已知 $f(x)=x^2\sin 2x$，则 $f^{(5)}(0)=$____________________.

13．设方程 $xe^y=\sin\dfrac{x}{2}+y+1$ 确定隐函数 $y=y(x)$，则 $\left.dy\right|_{x=0}=$______.

14．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=$______________.

15．函数 $y=x^2-4\ln(1+x)$ 的单调减少区间为____________

16．已知方程 $xe^{-x}=a\ (a>0)$ 有两个实根，则 a 满足___________________.

17．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+6}\right)^{\frac{x-1}{2}}=$__________.

18．函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带佩亚诺余项的 3 阶泰勒公式为____________________.

19．曲线 $y=2+\dfrac{36x}{(x+3)^2}$ 的渐近线有________________________.

20．设 $k \leqslant -1$，$A(k)$ 表示 x^2-2kx 在 $[-1,2]$ 上的最大值与最小值之差，则 $A(k)=$______.

“高等数学 A（上）”期中试题 6 参考答案

1．4；2．1；3．5；4．-2；5．$x=1$，跳跃间断点；6．3；

7．$x^{\sin\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\ln x+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)$；8．$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x\sin x-\cos x+1}{x^2}, & x\neq 0\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$；9．1；10．1；

11．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$；12．$-160$；13．$\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$；14．3；15．$(-1,1)$；16．$0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；

17．$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$；18．$1-2x+2x^2-2x^3+o\left(x^3\right)$；19．$x=-3, y=2$；20．$3-6k$.

“高等数学 A（上）”期中试题 7

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{5^n+(-2)^n}{n}\right]^{\frac{1}{n}}=$__________________.

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+\sin 2x}-1\right)\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{\tan x-\sin x}=$__________________.

3．已知 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$，则 $y'=$____________.

4．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的间断点为____________，且该间断点为____________型间断点.

5．当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{\sin^2 x}$ 是关于 x 的_______阶无穷小.（填写阶数）

6．设 $f(0)=0,\quad f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+2f(x)\right]^{\frac{1}{\ln(1-x)}}=$__________________.

7．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\cos x-1}{x}, & x<0\end{cases}$，则 $f'(0)=$__________________________.

8．设 $y=x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)\sin^2 x\sqrt{2x+1}}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$____________________________.

9．已知 $f(x)=x^2\cos\dfrac{x}{2}$,则 $f^{(6)}(0)=$________________.

10．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 确定，则 $\mathrm{d}y=$____________________.

11．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln(t^2+1)\\ y=\arctan t-\pi\end{cases}$ 确定，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________ $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$__________.

12．心形线 $r=1+\sin\theta$ 当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时的切线方程为____________________________.

13．落在平静水面上的石头使得水面上产生同心波纹.若最外一圈波纹半径的增大速率为 6m/s，则在 2s 末扰动水面面积增大的速率为__________________.

14．极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$__________________.

15．函数 $f(x)=\sin x\cdot\ln(1-x)$ 带佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式为___________.

16．函数 $f(x)=x^2-4\ln(x+1)$ 的单调减少区间是_______________.

17．设 $y=y\left(x\right)$ 是由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$_________.

18．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x^2\sin x}=$____________________.

19．函数 $f(x)=2^x$ 在 $\left[1,2\right]$ 区间上满足拉格朗日中值定理的点 $\xi=$________.

20．函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $[0，+\infty)$ 上的最大值为____________.

“高等数学 A（上）”期中试题 7 参考答案

1．5；2．$-\dfrac{2}{3}$；3．$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$；

4．$x=\pm1$，跳跃型；5．4；6．e^{-2}；7．$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$；

8．$x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)\sin^2 x\sqrt{2x+1}}\left[\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3}\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{2}{3}\cot x+\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{2x+1}\right]$；

9．$\dfrac{15}{8}$；10．$-\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$；11．$\dfrac{1}{2t}$，$-\dfrac{1}{2}$；12．$x+y-\dfrac{5+3\sqrt{3}}{4}=0$；

13．144π；14．$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$；15．$-x^2-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+o\left(x^4\right)$；

16．$(-1,\ 1)$；17．$2\mathrm{d}x$；18．$\dfrac{1}{3}$；19．$\dfrac{\ln 3-\ln\ln 2}{\ln 2}$；20．$\dfrac{1}{2}$

“高等数学 A（上）”期中试题 8

1．已知 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\geqslant 8,\\ f(f(x+5)), & x<8,\end{cases}$ 则 $f(5)=$______________.

2．设 $f(x)=\begin{cases}(1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}+1, & x<0,\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$，$a=$________，$b=$________.

3．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1-\ln(1-2x)}-1\right)\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}=$____________.

4．函数 $y=\dfrac{\sin\pi x}{(x^2-1)(2x-1)}$ 的第一类间断点是________；第二类间断点是________.

5．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{nx}+x-1}{\mathrm{e}^{nx}+1}$ 的连续区间是__________________.

6．当 $x\to 0$ 时 $\sqrt[3]{1-\cos x+\sqrt[3]{\sin^2 x}}\sim cx^k$，则 $c=$________；$k=$________.

7．设 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin 3x}}=$________

8．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos\pi x}{x-1}, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 则 $f'(1)=$________.

9．设 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x)(1-2x)^2}{\sqrt{x+\mathrm{e}^{-x}}}}$，则 $y'=$______________________________.

10．设 $f(x)=(x^2+1)\cos 2x$，则 $f^{(6)}(0)$ ________.

11．曲线 $xe^y+2\cos y=1$ 上点 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 处的切线方程为____________________.

12．由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定的函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$ ________； $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ________.

13．设函数 $y=(x^2+1)f(\arctan x)$，其中 f 为可导函数，则 dy=________.

14．心形线 $r=1+\sin\theta$ 上在 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 处的切线方程为____________________.

15．设 $f(x)$在 x=1 处可微，它在 x=0 的某邻域内满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=2+8x+o(x)$，则 $f(1)=$________； $f'(1)=$________.

16．注水于深 8m，上顶直径为 8m 的正圆锥形容器中，其速率为 4m^3/min，当水深为 5m 时，其水面上升的速率为________.

17．由中值定理 $\ln(1+x)-0=\dfrac{x}{1+\theta\cdot x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$ ________.

18．$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}\right]^{\frac{1}{x}}=$________.

19．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=$________.

20．设 $f(x)=e^{x^2}+a\cos x+b$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的 4 阶无穷小，则 $a=$________，$b=$________.

“高等数学 A（上）”期中试题 8 参考答案

1．6；2．ln2，1；3． $\dfrac{1}{3}$；4． $x=\pm 1$； $x=\dfrac{1}{2}$；

5． $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；6． $c=1$； $k=\dfrac{2}{3}$； 7． $e^{\frac{2}{3}}$；8． $\dfrac{\pi^2}{2}$；

9． $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{(1+x)(1-2x)^2}{\sqrt{x+e^{-x}}}}\cdot\left[\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{4}{1-2x}-\dfrac{1-e^{-x}}{2(x+e^{-x})}\right]$； 10．416；

11．$y=\dfrac{e^{\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}}x+\dfrac{\pi}{3}$；12．$t$，$\dfrac{1+t^2}{t}$；

13．$[2xf(\arctan x)+f'(\arctan x)]\mathrm{d}x$；　14．$x+y-\dfrac{5+3\sqrt{3}}{4}=0$；

15．−1，2；16．$\dfrac{16}{25\pi}\approx 0.204\text{m/min}$；17．$\dfrac{1}{2}$；18．$\dfrac{1}{e}$；

19．$\dfrac{1}{6}$；20．2，b=−3.

二、“高等数学 A（上）”期末试题

“高等数学 A（上）”期末试题 1

一、填空题

1．设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________________.

2．已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$_________.

3．设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin(\pi x)}-\dfrac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，为了使 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，应补充 $f(1)=$____________________.

4．设 $f(x)=e^{\sin\pi x}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=$____________________.

5．函数 $y=x+2\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是____________________.

6．设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$__________________.

7．$\displaystyle\int_1^{e^3}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x=$____________________ .

8．曲线 $y=\int_0^x(t-1)(t-2)\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为____________.

9．广义积分 $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=$________________.

10．方程 $4x dx-3y dy=3x^2 y dy$ 的通解为 ________________________.

二、设极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=4x^2+\frac{\arcsin 2(x-1)}{\sin(\sin(x-1))}+2\lim\limits_{x\to1}f(x)$， 求 $f(x)$.

三、设 $y=\int_{0}^{1+\sin t}(1+e^{\frac{1}{u}})du$，且 $t=t(x)$ 由 $\begin{cases}x=\cos 2v\\ t=\sin v\end{cases}\left(0<v<\frac{\pi}{2}\right)$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$.

四、设方程 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y(x)$ 的极值.

五、求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 的第一拱与 x 轴所围的平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

六、当 $x>0$ 时，证明不等式 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

七、求方程 $y''+4y'+4y=x+xe^x$ 的通解.

八、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调增加的，且二阶可导，$f''(x)>0$，证明：$\int_a^b f(x)dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

“高等数学 A（上）”期末试题 1 参考答案

一、1． e^{2a} ；2． $a=-\frac{3}{2}$；3． $f(1)=\frac{1}{\pi}$；4． π；5． $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$；

6． $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$；7． 2；8. $y=2x$；9． 1；

10． $1+x^2=Ce^{\frac{3}{4}y^2}$ （C 为正常数）.

二、解：设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=l$，则

$$f(x)=4x^2+\frac{\arcsin 2(x-1)}{\sin(\sin(x-1))}+2l,$$

于是

$$l=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left[4x^2+\frac{\arcsin 2(x-1)}{\sin(\sin(x-1))}+2l\right]=6+2l.$$

由此得 $l=-6$．故所求函数为

$$f(x)=4x^2+\frac{\arcsin 2(x-1)}{\sin(\sin(x-1))}-12.$$

三、解：由变限积分函数的求导公式，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{1+\sin t}}\right)\cos t.$$

又根据参数形式给出的隐函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v}}=\frac{\cos v}{-2\sin 2v}=-\frac{1}{4\sin v}=-\frac{1}{4t},$$

因此
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{\cos t}{4t}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{1+\sin t}}\right).$$

四、解：$x^3+3x^2y-2y^3=2$ 两边关于 x 求导得

$$3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0\text{，}\tag{1}$$

令 $y'=0$，与原方程结合，求得驻点为 $(0,-1)$ 和 $(-2,1)$.

由式（1）得 $y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，对其求导得二阶导数为

$$y''=\frac{(2x+2xy'+2y)(2y^2-x^2)-(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$$

且得
$$y''\Big|_{\substack{x=0\\y=-1}}=-1<0,\qquad y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1}}=1>0.$$

故函数有极大值 $y(0)=-1$，也有极小值 $y(-2)=1$.

五、解：取积分变量为 x, $x\in[0,2\pi a]$. 任取一个子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]\subset[0,2\pi a]$,在此子区间上绕 y 轴旋转的体积微元为 $\mathrm{d}V=2\pi xy\mathrm{d}x.$

所以体积为

$$V=\int_0^{2\pi a}2\pi xy\mathrm{d}x=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=6\pi^3a^3.$$

六、证明：令 $f(x)=\arctan x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\pi}{2},x>0$. 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} < 0, x > 0.$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少．又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，于是知

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2} > 0, \quad x > 0,$$

即
$$\arctan x + \frac{1}{x} > \frac{\pi}{2}, \quad x > 0.$$

七、解：（1）齐次方程为 $y'' + 4y' + 4y = 0$．其特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 .$$

特征根为$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$．故齐次方程的通解为

$$\overline{y} = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x}, C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

（2）设 $y'' + 4y' + 4y = x$ 的一个特解为 $y_1^*(x) = ax + b$．代入原方程得

$$4a + 4ax + 4b = x \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_1^* = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

（3）求 $y'' + 4y' + 4y = x\mathrm{e}^x$ 的一个特解.

因为$\alpha = 1$ 不是特征根，可设其特解为 $y_2^* = (Ax + B)\mathrm{e}^x$．代入方程化简得

$$6A\mathrm{e}^x + (9Ax + 9B)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$

比较系数得$9A = 1, \quad 6A + 9B = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{9}, B = -\frac{2}{27}$.

于是
$$y_2^* = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)\mathrm{e}^x.$$

（4）原方程的一个特解为

$$y^* = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)\mathrm{e}^x.$$

故所求通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)\mathrm{e}^x. C_1, C_2 \text{ 为任意常数.}$$

八、证明：作辅助函数

$$F(t)=(t-a)\frac{f(a)+f(t)}{2}-\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

下面证明 $F(t)>0,\forall t\in[a,b]$. 因为 $f''(t)>0$，从而 $f'(t)$ 单调增加，所以

$$\begin{aligned}F'(t)&=\frac{f(a)+f(t)}{2}+(t-a)\frac{f'(t)}{2}-f(t)\\&=\frac{f(a)-f(t)}{2}+(t-a)\frac{f'(t)}{2}=\frac{1}{2}(a-t)f'(\xi)+\frac{1}{2}(t-a)f'(t)\\&=\frac{1}{2}(t-a)[f'(t)-f'(\xi)]>0,\quad \xi\in(a,t)\end{aligned}$$

即 $F'(t)>0$，推知 $F(t)$ 单调增加，又 $F(a)=0$，故 $F(t)>0,\quad t\in(a,b]$.

“高等数学 A（上）”期末试题 2

一、填空题

1．$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

2．已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ a, \qquad\quad x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

3．当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的________阶无穷小（填阶数）.

4. 若函数 $y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2}=$________.

5．曲线 $y=\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ 的拐点是________.

6．若 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，则 $\int x^2 f(\ln x)\,\mathrm{d}x=$____________________.

7．$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{1}{x^2(1+x^2)}\,\mathrm{d}x=$__________________ .

8．设 $g(x)$ 是连续函数，$G(x)=\int_{\sin x}^{x^2}g(t)\,\mathrm{d}t$，则 $G'(0)=$________.

9．广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}=$ __________________.

10．设二阶线性方程 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ 有三个特解 $y_1=\mathrm{e}^x$， $y_2=\sin x$，

$y_3=\cos x$，则其通解为____________________ .

二、求出函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$ 的间断点，并指出其类型.

三、设 $y=y(x)$ 是由 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\ \mathrm{d}t$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. 试求：（1）函数的增减区间和极值；（2）函数图像的凹凸区间，并判别曲线有无拐点.

五、在曲线 $y=x^2\ (x\geqslant 0)$ 上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\dfrac{1}{12}$，试求：（1）切点 A 的坐标；（2）过切点 A 的切线方程；（3）由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

六、若 $0<x<1$，证明不等式 $\dfrac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}$.

七、求微分方程 $y''+4y=x(1+\mathrm{e}^{2x})$ 的通解.

八、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x>\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

“高等数学 A（上）”期末试题 2 参考答案

一、1．e^6；2．$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；3．$\dfrac{1}{8}$；4．$-\dfrac{2\pi}{3}$；5．$(1,0)$；6．$-\dfrac{1}{2}x^2+C$；

7．$1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{12}$；8．$-g(0)$；9．$\dfrac{1}{2}\ln 2$；10．$y=C_1(\mathrm{e}^x-\sin x)+C_2(\mathrm{e}^x-\cos x)+\mathrm{e}^x$

二、解：函数为 $y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 于是函数的间断点为 $x=1$，是跳跃间断点.

三、解：对方程两边关于 x 求导，可得

$$2-\sec^2(x-y)(1-y')=\sec^2(x-y)(1-y').$$

即
$$y'=1-\cos^2(x-y)=\sin^2(x-y).$$

再求一次导，可得

$$y''=2\sin(x-y)\cos(x-y)(1-y')=2\sin(x-y)\cos^3(x-y).$$

四、解：函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

（1）$y'=1-\dfrac{8}{x^3}$，故驻点为$x=2$.

当$x\in(-\infty,0)$时，$y'>0$；当$x\in(0,2)$时，$y'<0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$y'>0$. 所以函数的增区间为$(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$.

$x=2$为极小值点，极小值为$y(2)=3$.

（2）$y''=\dfrac{24}{x^4}>0$，故$(-\infty,0),(0,+\infty)$均为上凹区间. 函数图像无拐点.

五、解：设切点A的坐标为(a,a^2)，则过点$A(a,a^2)$的切线的斜率为$y'|_{x=a}=2a$，切线方程为$y-a^2=2a(x-a)$，即$y=2ax-a^2$.

切线与x轴的交点为$\left(\dfrac{a}{2},0\right)$，曲线、$x$轴及切线所围图形的面积为

$$S=\int_0^a x^2\mathrm{d}x-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}=\frac{a^3}{12}.$$

由题设$S=\dfrac{1}{12}$，因此$a=1$.

于是，切点A的坐标为$(1,1)$；过A点的切线方程为$y=2x-1$.

旋转体的体积为 $$V=\int_0^1\pi(x^2)^2\mathrm{d}x-\int_{\frac{1}{2}}^1\pi(2x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}.$$

六、证明：不等式即 $$(1-x)\mathrm{e}^{2x}-(1+x)<0.$$

令 $$f(x)=(1-x)\mathrm{e}^{2x}-(1+x),$$

则 $$f'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{2x}-1,\quad f''(x)=-4x\mathrm{e}^{2x}.$$

当$0<x<1$时，$f''(x)<0$，所以$f'(x)$在$(0,1)$内单调减少，且$f'(0)=0\Rightarrow f'(x)<0$. 由此推知$f(x)$在$(0,1)$内单调减少，所以

$$f(x)<f(0)=0.$$

于是 $$(1-x)\mathrm{e}^{2x}-(1+x)<0,$$

即
$$\frac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}.$$

七、解：（1）求齐次方程 $y''+4y=0$ 的通解．其特征方程为 $\lambda^2+4=0$ ，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=\pm 2i$ ．故齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.\quad C_1,C_2\text{为任意常数}.$$

（2）求 $y''+4y=x$ 的一个特解．因 $\lambda_0=0$ 不是特征根，故可设特解形如 $y_1^*=ax+b$ ，

代入上述方程求得 $y_1^*=\dfrac{1}{4}x$.

（3）求 $y''+4y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解．因为 $\alpha=2$ 不是特征根，故可设特解形如

$$y_2^*=(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}.$$

代入上述方程化简得

$$4A\mathrm{e}^{2x}+(8Ax+8B)\mathrm{e}^{2x}=x\mathrm{e}^{2x}$$

比较系数得 $8A=1,4A+8B=0\Rightarrow A=\dfrac{1}{8},B=-\dfrac{1}{16}$.

于是
$$y_2^*=\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

故原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

（4）所求通解为
$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x+\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{16}\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

八、证明：设
$$F(t)=\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x,\quad a\leqslant t\leqslant b.$$

因为 $f(t)$ 单调增加，于是

$$F'(t)=\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+\frac{a+t}{2}f(t)-t\,f(t)$$
$$=\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+\frac{a-t}{2}f(t)=\frac{1}{2}f(\xi)(t-a)-\frac{1}{2}f(t)(t-a)$$

$$=\frac{1}{2}(t-a)[f(\xi)-f(t)]<0,\quad \xi\in(a,t).$$

由此推知 $F(t)$ 单调递减.

由于 $F(a)=0$，故 $F(t)<0, t\in(a,b]$，即得所欲证不等式.

“高等数学 A（上）”期末试题 3

一、填空题

1．已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n-1}\right)^{n-1}=\mathrm{e}^{-2}$，则常数 $a=$________.

2．设函数 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[t\mathrm{e}^t\int_{t^2}^0 f(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}t}{x^3\mathrm{e}^x}$________.

3．已知当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+ax^3)$ 与 $\sin x-x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

4．双曲线 $x^2-y^2=1$ 在点 $\left(2,\sqrt{3}\right)$ 处法线方程为____________________.

5．曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的拐点为________.

6．$\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=$__________________ .

7．$\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=$__________________.

8．函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的最小值为__________________.

9．微分方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足初始条件 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathrm{e}$ 的解是__________________.

10．同时垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$ 的单位向量为________.

二、求函数 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ 的单调区间及极值.

三、设 $f(x)=\cos x+\sin x\cdot\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x+\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

四、计算 $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{x^2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$.

五、当 $x \neq 0$ 时，证明不等式 $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

六、设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上 $f(x) > 0$，并满足 $xf'(x) = f(x) + \dfrac{3}{2}ax^2$（$a$ 为常数），曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 的面积为 2，求函数 $y = f(x)$，并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小.

七、求方程 $y'' + 2y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

八、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(x) \geqslant 0$，若 $\forall x \in [a,b]$，有 $f(x) \leqslant \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：$f(x) = 0\ (\forall x \in [a,b])$.

“高等数学 A（上）”期末试题 3 参考答案

一、1．-3；2．0；3．$-\dfrac{1}{6}$；4． $y - \sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-2)$；5． $\left(-\dfrac{1}{2}, \mathrm{e}^{-2}\right)$；6． $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} + C$（提示：$\dfrac{x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$）；7． $\dfrac{\pi}{2}$；8． $\ln\dfrac{3}{4}$；9． $y = \mathrm{e}^{\tan\frac{x}{2}}$（或 $y = \mathrm{e}^{\csc x - \cot x}$）；10． $\pm\left\{\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right\}$.

二、解：定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

令 $f'(x) = 0$ 得驻点 $x = 1,\ x = \mathrm{e}^2$.

当 $0 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$；当 $1 < x < \mathrm{e}^2$ 时， $f'(x) > 0$；当 $x > \mathrm{e}^2$ 时， $f'(x) < 0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,1), \left(\mathrm{e}^2, +\infty\right)$ 上单调减少，在 $\left(1, \mathrm{e}^2\right)$ 上单调增加.

在 $x = 1$ 取极小值 $f(1) = 0$；在 $x = \mathrm{e}^2$ 取极大值 $f(\mathrm{e}^2) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

三、解：令 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$， $b = \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$，则

$$f(x) = \cos x + b\sin x + \frac{1}{\pi}a\ ;$$

由
$$a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x + b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}a$$

得
$$b-\frac{1}{2}a=-1;$$

由
$$b=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x+b\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x+a$$

得
$$a+b=0;$$

解得　$a=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{2}{3}$；所以
$$f(x)=\cos x-\frac{2}{3}\sin x+\frac{2}{3\pi}.$$

四、解：
$$\frac{x^2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{(2x+1)+1}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\int_{-2}^{1}\frac{x^2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\frac{(2x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}-\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi;$$

$$\int_{-2}^{1}\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2+x+1}\Bigg|_{-2}^{1}=0;$$

$$\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\int_{-2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2}\xlongequal{x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 t}{\left(\frac{3}{4}\sec^2 t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{9}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{8\sqrt{3}}{9}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi+\frac{2}{3};$$

原式$=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{1}{2}\left(\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi+\frac{2}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{27}\pi-\frac{1}{3}.$

五、证明：令 $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$，则

$$f'(x)=x-\sin x,\quad f''(x)=1-\cos x\geqslant 0 \quad （仅在 x=2k\pi, k\in Z 取零）.$$

函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<f'(0)=0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$；于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

所以当 $x<0$ 时，$f(x)>f(0)=0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$.即当 $x\neq 0$ 时, $f(x)>0$，即 $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$.

六、解：当 $x\neq 0$ 时，$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{3}{2}ax,$$

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{3}{2}ax\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=x\left(\frac{3}{2}ax+C\right)=\frac{3}{2}ax^2+Cx,$$

(或 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\dfrac{3}{2}a\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\dfrac{3}{2}a\Rightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}ax^2+Cx$)

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，得

$$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+Cx,\quad x\in[0,1]$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{a}{2}x^3+\frac{C}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C,$$

故 $C=4-a$.

于是 $$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x.$$

$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left[\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x\right]^2\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi$$

由 $V'(a)=\left(\dfrac{1}{15}a+\dfrac{1}{3}\right)\pi=0$ 得唯一驻点 $a=-5$；又 $V''(a)=\dfrac{1}{15}>0$, 故当 $a=-5$ 时，旋转体体积最小.

七、解：(1) 齐次方程为 $$y''+2y'+y=0.$$

其特征方程为 $$r^2+2r+1=0.$$

特征根为$r_1=r_2=-1$．齐次方程的通解为

$$\overline{y}=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x},\quad C_1,C_2\text{ 为任意常数.}$$

（2）求 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的一个特解.

因 $r=-1$ 是二重特征根，故可设特解形如

$$y^*(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}(ax+b)\,.$$

代入原方程得

$$\left[(6ax+2b)\mathrm{e}^{-x}-2(3ax^2+2bx)\mathrm{e}^{-x}+(ax^3+bx^2)\mathrm{e}^{-x}\right]+$$

$$2[(3ax^2+2bx)\mathrm{e}^{-x}-(ax^3+bx^2)\mathrm{e}^{-x}]+(ax^3+bx^2)\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x};$$

比较系数得 $a=\dfrac{1}{6}$，$b=0$；所以

$$y^*(x)=\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}\,.$$

故所求通解为

$$y=\overline{y}+y^*=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}.\quad C_1\ ,C_2\text{ 为任意常数.}$$

八、证明：因为函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，所以 $f(x)$ 可取得最值.

令 $M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，则

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant M(x-a)\,,\quad \forall x\in[a,b]\,;$$

$$0\leqslant f(x)\leqslant\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x M(t-a)\mathrm{d}t\leqslant M\frac{(x-a)^2}{2}\,,\quad \forall x\in[a,b]\,;$$

如此继续下去，对任意自然数 n，有

$$0\leqslant f(x)\leqslant M\frac{(x-a)^n}{n!}\quad,\quad \forall x\in[a,b]\,.$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}M\dfrac{(x-a)^n}{n!}=0$，故 $f(x)=0\ \ (\forall x\in[a,b])$.

“高等数学 A（上）”期末试题 4

一、填空题

1．$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sec\dfrac{\pi}{2}x=$___________________ .

2．$x=1$是函数$y=\dfrac{\sin\pi x}{\left|x(1-x)\right|}$的第_________ 类间断点.

3．曲线$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程为_________________.

4．设$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则$\mathrm{d}y|_{x=0}=$________________.

5．曲线$y=\dfrac{x^3+4}{x}$的拐点是 _____________ .

6．已知$f(x)$的一个原函数是e^{x^2}，则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$____________________ .

7．$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{1+2\ln x}}{x}\mathrm{d}x=$___________________.

8．$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=$ ___________________.

9．设方程$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$有两个特解$y_1=3+x^2+\mathrm{e}^{-x}$，$y_2=3+x^2$，且对应的齐次方程的一个解为$y_3=x$， 则该方程的通解为____________.

10．已知$|\boldsymbol{a}|=15,|\boldsymbol{b}|=25,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=20$，则$\left|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=$_________________.

二、求函数$y=(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}$的单调区间及极值.

三、设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$可导，$f(0)=0$，其反函数为$g(x)$，$\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^3+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，求$f(x)$.

四、计算$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{2-x^2}}$.

五、当$x\neq 0$时，证明不等式 $x\ln(x+\sqrt{x^2+1})>\sqrt{x^2+1}-1$.

六、设$0<t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，曲线$f(x)=\sin x$与直线$x=t,\ x=2t$及$y=0$ 所围图形 S 绕x轴旋转而

成的旋转体体积为$V(t)$，问t分别为何值时，

（1）图形S的面积$A(t)$最大；（2）旋转体体积$V(t)$最大.

七、求微分方程$y''+4y=-4\sin 2x$的通解.

八、函数$f(x)$在$\left[-\dfrac{1}{a},a\right]$上连续且$f(x)\geqslant 0$，$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x=0$，证明：$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

“高等数学 A（上）”期末试题 4 参考答案

一、1．$\dfrac{2}{\pi}$；2．一；3．$y=x-\dfrac{\pi}{2}+2$；4．$-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x$；5．$(-\sqrt[3]{4},0)$；6．$(2x^2-1)\mathrm{e}^{x^2}+C$

7．$\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}$；8．$\dfrac{3}{8}$；9．$y=C_1x+C_2\mathrm{e}^{-x}+3+x^2$；10．$10\sqrt{13}$.

二、解：$y'=\mathrm{e}^{\arctan x}+(x-1)\cdot\mathrm{e}^{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x(x+1)}{1+x^2}\mathrm{e}^{\arctan x}$

令$y'=0$，驻点为$x=0,\ x=-1$.

当$x<-1$或$x>0$时，$y'>0$；当$-1<x<0$时，$y'<0$.

函数在$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$上单调增加；在$(-1,0)$上单调减少.

函数在$x=0$处取极小值-1；在$x=-1$处取极大值$-2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$.

三、解：两边关于x求导，注意到$g(f(x))=x$，得一阶线性微分方程

$$xf'(x)=3x^2+xf(x)，\quad f'(x)-f(x)=3x；$$

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int 3x\mathrm{e}^{\int -1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{x}\left(\int 3x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{x}[-3(1+x)\mathrm{e}^{-x}+C]=C\mathrm{e}^{x}-3(1+x).$$

因为$f(0)=0$，所以$C=3$.故

$$f(x)=3\mathrm{e}^{x}-3(1+x).$$

四、解：令$x=\sqrt{2}\sin t$，则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin t+\cos t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Big[t+\ln(\sin t+\cos t)\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2.$$

五、证明：不等式即 $x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+1>0.$

令 $f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+1$，则

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0\ .$$

函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

当 $x<0$ 时， $f'(x)<f'(0)=0$；当 $x>0$ 时， $f'(x)>f'(0)=0$；

（也可以不用 $f''(x)$：当 $x<0$ 时， $f'(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}<0$；当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$.）

于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

所以当 $x<0$ 时， $f(x)>f(0)=0$；当 $x>0$ 时， $f(x)>f(0)=0$.

由此推知，当 $x<0$ 时, $f(x)>f(0)=0$；当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$. 于是，当 $x\neq 0$ 时 $f(x)>0$，即

$$x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)>\sqrt{x^2+1}-1\ .$$

六、解：（1）
$$A(t)=\int_t^{2t}\sin x\mathrm{d}x\text{，}\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$A'(t)=2\sin 2t-\sin t=\sin t(4\cos t-1)\ .$$

令 $A'(t)=0$，得唯一驻点 $t=\arccos\dfrac{1}{4}$.

当 $0<t<\arccos\dfrac{1}{4}$ 时， $A'(t)>0$；当 $\arccos\dfrac{1}{4}<t<\dfrac{\pi}{2}$ 时， $A'(t)<0$；所以 $t=\arccos\dfrac{1}{4}$ 为 $A(t)$ 的极大值点，也是最大值点.

（2）
$$V(t)=\pi\int_t^{2t} f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_t^{2t}\sin^2 x\mathrm{d}x\text{，}\quad t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

$$V'(t)=\pi(\sin^2 2t\cdot 2-\sin^2 t)=\pi\sin^2 t(8\cos^2 t-1)$$
$$=\pi\sin^2 t\left(2\sqrt{2}\cos t-1\right)\left(2\sqrt{2}\cos t+1\right)\text{；}$$

令$V'(t)=0$，得唯一驻点$t=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

当$0<t<\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$时，$V'(t)>0$；　当$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}<t<\dfrac{\pi}{2}$时，$V'(t)<0$.

所以$t=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$为$V(t)$的极大值点，也是最大值点.

七、解：（1）求齐次方程$y''+4y=0$的通解. 其特征方程为
$$r^2+4=0.$$
特征根为　$r_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$. 齐次方程的通解为
$$\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x,\ \ C_1,C_2\text{为任意常数.}$$
（2）求$y''+4y=-4\sin 2x$的一个特解. 因$\pm 2i$是特征根，故可设特解形如
$$y^*=x(a\cos 2x+b\sin 2x)\text{，}$$
代入上述方程得
$$[2(-2a\sin 2x+2b\cos 2x)+x(-4a\cos 2x-4b\sin 2x)]+$$
$$4x(a\cos 2x+b\sin 2x)=-4\sin 2x.$$
比较系数得$a=1,\ \ b=0$.

故
$$y^*=x\cos 2x.$$
故所求通解为
$$y=\overline{y}+y^*=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+x\cos 2x.$$

八、证明：由于　$f(x)(x-a)\left(x+\dfrac{1}{a}\right)\leqslant 0$.
$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)(x-a)\left(x+\frac{1}{a}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{a}}^{a}\left[x^2 f(x)+\left(\frac{1}{a}-a\right)xf(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{a}-a\right)\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$$

由于
$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} xf(x)\mathrm{d}x=0,$$

所以
$$\int_{-\frac{1}{a}}^{a} x^2 f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{1}{a}}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

“高等数学 A（上）”期末试题 5

一、填空题

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$________________ .

2．设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0\\ \sin bx/x, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

3．曲线 $y=x^2\mathrm{e}^{-x^2}+\arctan x$ 的水平渐近线为________________ .

4．设曲线 $y=\dfrac{3}{7-x^n}$ 在点 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线与 x 轴交点为 $(\xi_n,0)\quad(n=1,2,3,\cdots)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\xi_n=$________________.

5．设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=\arctan t,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$__________________.

6．设 $f(x)$ 的一个原函数是 $F(x), a,b$ 为非零常数，则不定积分 $\int f(a^2x+b)\mathrm{d}x=$________.

7．$\displaystyle\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-2x+x^2}}=$___________.

8．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=$____________.

9．设 $y_0(x)$ 是微分方程 $y''+7y'+10y=0$ 满足条件 $y(0)=3,\quad y'(0)=-12$ 的特解，则 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y_0(x)\mathrm{d}x=$________________.

10．已知平面 π 过点 $(-1,2,3)$，且与直线 $\begin{cases}x+y-2z=1\\ 2x+y+z=2\end{cases}$ 垂直，则 π 的方程是________.

二、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1/n}{1-\cos(1/n)}}$.

三、设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}, x>0, \\ 1, \quad x=0. \end{cases}$ （1）证明：$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续；（2）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调区间；（3）求 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 的最大值与最小值.

四、设函数 $f(x)=x-(a+be^{x^2})\sin x$ 当 $x\to 0$ 时是 x 的 5 阶无穷小量，求常数 a,b 的值.

五、求证：当 $x>0$ 时，不等式 $\ln(e^{2x}+x)>3x-\dfrac{5}{2}x^2$ 成立.

六、设函数 $f(x)$ 满足微分方程 $xf'(x)-3f(x)=-6x^2$ 及条件 $f(1)=-1$. 平面图形 D 由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$ 与 x 轴围成，求 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

七、求微分方程 $y''-3y'+2y=x(4+e^{2x})$ 的通解.

八、设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可导，且存在常数 $\lambda>0$ 与 $k>0$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+\lambda f(x)]=k$. 证明：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\lambda x}f(x)=+\infty$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{k}{\lambda}$.

“高等数学 A（上）”期末试题 5 参考答案

一、1．e^{-3}；2．$a=b$；3．$y=\pm\pi/2$；4．-6；5．$-\dfrac{1}{2}$；6．$\dfrac{1}{a^2}F(a^2x+b)+c$；

7．$\ln(1+\sqrt{2})$；8．$\dfrac{\pi}{8}$；9．$\int_0^{+\infty}y_0(x)dx=\int_0^{+\infty}(e^{-2x}+2e^{-5x})dx=\dfrac{9}{10}$；

10．$3(x+1)-5(y-2)-(z-3)=0$ 或 $3x-5y-z+19=0$.

二、解：因为

$$\lim_{x\to0}[f(x)]^{\frac{x}{1-\cos x}}=\lim_{x\to0}[1+(f(x)-1)]^{\frac{x}{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{(f(x)-1)}}\right\}^{\frac{x[f(x)-1]}{1-\cos x}},$$

而

$$\lim_{x\to0}\frac{x[f(x)-1]}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x[f(x)-1]}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2f'(0)=4,$$

所以 $$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{x}{1-\cos x}}=e^4 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1/n}{1-\cos(1/n)}}=e^4.$$

三、解：（1）当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是初等函数，所以连续.

因为 $$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

（2） $f'(x)=-e^{-x}+\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(1-x^2e^{-x+\frac{1}{x}}\right)(x>0)$，

令 $g(x)=1-x^2e^{-x+\frac{1}{x}}$，则

$$g'(x)=-2xe^{-x+\frac{1}{x}}-x^2\left(-1-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x+\frac{1}{x}}=e^{-x+\frac{1}{x}}(x^2-2x+1)$$

$$=e^{-x+\frac{1}{x}}(x-1)^2>0\ \ (x>0,x\neq 1).$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

因此有 $g(x)\begin{cases}<g(1)=0, & 0<x<1,\\ =0, & x=1,\\ >g(1)=0, & x>1,\end{cases}$ 即$f'(x)\begin{cases}<0, & 0<x<1,\\ =0, & x=1,\\ >0, & x>1.\end{cases}$

故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增.

（3）由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上递减，在 $[1,+\infty)$ 上递增，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(1)=\dfrac{2}{e}$.

又因 $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+e^{-\frac{1}{x}}\right)=1$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值为 1.

四、解：由于 $$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^5),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5).$$

可得

$$f(x)=x-\left[a+b+bx^2+\frac{b}{2}x^4+o(x^5)\right]\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right]$$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a+b}{6}-b\right)x^3-\left(\frac{a+b}{120}-\frac{b}{6}+\frac{b}{2}\right)x^5+o(x^5).$$

为了使得 $f(x)=x-(a+be^{x^2})\sin x$ 当 $x\to 0$ 时是 x 的 5 阶无穷小量，必有

$$1-a-b=0, \frac{a+b}{6}-b=0.$$

可得

$$a=\frac{5}{6}, b=\frac{1}{6},$$

且

$$f(x)=-\frac{23}{360}x^5+o(x^5).$$

五、证明：令 $f(x)=\ln(e^{2x}+x)-3x+\frac{5}{2}x^2$，则 $f(0)=0$.

只需证明当 $x>0$ 时 $f(x)>0$.

由于

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}+1}{e^{2x}+x}-3+5x=\frac{2e^{2x}+1+(5x-3)(e^{2x}+x)}{e^{2x}+x}$$

$$=\frac{5x^2+3x(e^{2x}-1)+1+2xe^{2x}-e^{2x}}{e^{2x}+x}, \tag{1}$$

再令 $g(x)=1+2xe^{2x}-e^{2x}$，则 $g(0)=0$，且 $g'(x)=4xe^{2x}(x>0)$，所以 $g(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 单调增加，从而 $g(x)>g(0)=0(x>0)$.

又由式(1)可知，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，于是 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时单调增加，所以 $f(x)>f(0)=0$.

六、解：一阶线性方程 $xy'-3y=-6x^2$ 的通解是 $y=cx^3+6x^2$，由初始条 $f(1)=-1$ 可得 $c=-7$，从而所求曲线为 $y=-7x^3+6x^2$.

D 的面积为

$$S=\int_0^1|6x^2-7x^3|dx=\int_0^{\frac{6}{7}}(6x^2-7x^3)dx+\int_{\frac{6}{7}}^1(7x^3-6x^2)dx$$

$$=\left(\frac{6}{7}\right)^3-\frac{1}{4}=\frac{521}{1372}.$$

D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1(-7x^3+6x^2)^2dx=\pi\left(7-14+\frac{36}{5}\right)=\frac{\pi}{5}.$$

七、解：特征方程为 $r^2-3r+2=0$，解得特征值为 $r_1=1,r_2=2$，于是齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}\text{，}C_1\text{，}C_2\text{ 为任意常数.}$$

对于方程 $y''-3y'+2y=4x$，由于 $\alpha=0$ 不是特征根，故设其特解为

$$y_1^*=ax+b.$$

把该特解代入上述方程并用待定系数法求得 $a=2,b=3$，故得特解

$$y_1^*=2x+3.$$

对于方程 $y''-3y'+2y=x\mathrm{e}^{2x}$，因 $\alpha=2$ 是单根，故设特解为

$$y_2^*=(cx^2+dx)\mathrm{e}^{2x},$$

代入方程并用待定系数法得 $c=\dfrac{1}{2},d=-1$，于是特解为

$$y_2^*=\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

故原方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+y_1^*+y_2^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+2x+3+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

八、证明：（1）由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+\lambda f(x)]=k$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}[\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)]'=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}\cdot[f'(x)+\lambda f(x)]=+\infty.$$

于是存在常数 $x_0>0$，当 $x>x_0$ 时，$[\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)]'>1$.

设 $x>x_0$，在区间 $[x_0,x]$ 上对函数 $\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)$ 用拉格朗日中值定理，可知 $\exists\xi\in(x_0,x)$，使得

$$\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)-\mathrm{e}^{\lambda x_0}f(x_0)=[\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)]'|_{x=\xi}(x-x_0)>x-x_0,$$

由此推得

$$\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)>x-x_0+\mathrm{e}^{\lambda x_0}f(x_0)\to+\infty(x\to x_0).$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)=+\infty.$$

（2）利用（1）的结论及洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)}{\mathrm{e}^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[\mathrm{e}^{\lambda x}f(x)]'}{(\mathrm{e}^{\lambda x})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\lambda x}[f'(x)+\lambda f(x)]}{\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\cdot\lim_{x\to+\infty}[f'(x)+\lambda f(x)]=\frac{k}{\lambda}.$$

“高等数学 A（上）”期末试题 6

一、填空题

1．设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________________.

2．$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

3．曲线 $y=e^{\frac{2}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ 的水平渐近线为________________.

4．设 $f(x)$ 为可导函数，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为________.

5．设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''|_{x=0}=$________.

6．设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且 $a\neq 0$，则 $\displaystyle\int\frac{f(ax)}{a}dx=$________________.

7．$\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx=$________.

8．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{5+4x+x^2}=$________.

9．$yy''-2(y')^2=0$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=-1$ 的特解是________.

10．过点 $(-2,1,5)$ 且与两平面 $\pi_1: x+2y+z=0, \pi_2: 2x+y-4z=1$ 均平行的直线方程是______________________.

二、若二次曲线 $y=ax^2+bx+c\ (0<x<1)$ 将两条曲线

$$L_1: y=e^x\ (-\infty<x\leqslant 0),\quad L_2: y=\frac{1}{x}\ (1\leqslant x<+\infty)$$

连接成处处有切线的曲线，求该二次曲线的方程.

三、设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t=-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{-x}-1\,(-\infty<x<+\infty)$.

（1）讨论 $f(x)$ 在 $(-\infty<x<+\infty)$ 是否存在最大值或最小值，若存在则求出最值；（2）求 $y=f(x)$ 的渐近线方程.

四、设当 $x\to 0$ 时，有 $\mathrm{e}^x(1+bx+cx^2)=1+ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小量，求常数 a,b,c 的值.

五、设 $b>a>0$，证明不等式 $(a+b)\mathrm{e}^{a+b}<a\mathrm{e}^{2a}+b\mathrm{e}^{2b}$.

六、已知点 $A(2,0,0)$ 与 $B(0,1,2)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面为 S，求由 S 及两平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体的体积.

七、求微分方程 $y''+2y'+2y=x(2x+\mathrm{e}^x)$ 的通解.

八、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调减少，求证：对任何 $\lambda\in(a,b)$，必有 $\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x>\dfrac{\lambda-a}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

“高等数学 A（上）”期末试题 6 参考答案

一、1． e^{2a}；2． $a=-2$；3． $y=\pi/4$；4． $k=-2$；5． $-\dfrac{3}{2}$；6． $\dfrac{\sin ax}{a^3x}+c$；

7． $\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2\Big|_{1/4}^{1}=\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{\pi^2}{36}=\dfrac{2}{9}\pi^2$；8． $\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2$；9． $y=\dfrac{1}{1+x}$；

10． $\dfrac{x+2}{9}=\dfrac{y-1}{-6}=\dfrac{z-5}{3}$ 或 $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$.

二、解：问题等价于下述函数处处可导：

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0,\\ ax^2+bx+c, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(ax^2+bx+c)=c,$$

可得 $c=1$.

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，有

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(ax^2+bx+c)=a+b+c,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$$

可得 $a+b+c=1$，从而 $a+b=0$.

再由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，得 $f'_-(0)=f'_+(0)$，可得 $b=1$，由此得 $a=-1$. 并可验证，此时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处也可导，于是所求曲线为 $y=-x^2+x+1$.

三、解：（1）先求出 $f(x)$ 的表达式. 由

$$\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t \xlongequal{t-x=u} \int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u \Rightarrow \int_{-x}^0 f(u)\mathrm{d}u=-\frac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{-x}-1 .$$

上式两边对 x 求导得

$$f(-x)=-x-\mathrm{e}^{-x}\Rightarrow f(x)=x-\mathrm{e}^x,\ x\in(-\infty,+\infty) .$$

由于 $f'(x)=1-\mathrm{e}^x\begin{cases}>0, & x<0,\\ =0, & x=0,\\ <0, & x>0.\end{cases}$ 所以 $f(0)=-1$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无最小值.

（2）由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right)=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，所以当 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线为 $y=x$.

四、解：设 $f(x)=\mathrm{e}^x(1+bx+cx^2)-1-ax$，利用 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$，

得
$$\begin{aligned}f(x)&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)(1+bx+cx^2)-1-ax\\&=(1-a+b)x+\left(\frac{1}{2}+b+c\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c\right)x^3+o(x^3) .\end{aligned}$$

由于当 $x\to0$ 时，$f(x)=o(x^3)$，必有

$$1-a+b=0,\quad \frac{1}{2}+b+c=0,\quad \frac{1}{6}+\frac{b}{2}+c=0 ,$$

所以得
$$a=\frac{1}{3},b=-\frac{2}{3},c=\frac{1}{6} .$$

五、证明：不等式等价于$\frac{1}{2}(a+b)\mathrm{e}^{2\cdot\frac{a+b}{2}}<a\mathrm{e}^{2a}+b\mathrm{e}^{2b}$．作辅助函数$g(x)=x\mathrm{e}^{2x}$，$x>0$．则

$$g'(x)=\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{2x},\quad g''(x)=4\mathrm{e}^{2x}+4x\mathrm{e}^{2x}.$$

显然当$x>0$时，$g''(x)>0$，因此曲线$y=g(x)$是上凹的.

从而

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{2}[g(a)+g(b)]\Rightarrow(a+b)\mathrm{e}^{a+b}<a\mathrm{e}^{2a}+b\mathrm{e}^{2b}.$$

六、解：线段AB在直线$\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$上，若以$z$为参数，则线段$AB$上任意一点$M(x,y,z)$的坐标满足：$x=2-z,y=\frac{z}{2},0\leqslant z\leqslant 2$.

过点$M(x,y,z)$垂直于z轴的平面与旋转体的截面是半径为

$$R=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2-z)^2+\frac{z^2}{4}}.$$

的圆域，故旋转体的体积

$$V=\int_0^2\pi R^2\mathrm{d}z=\pi\int_0^2\left[(2-z)^2+\frac{z^2}{4}\right]\mathrm{d}z=\pi\int_0^2\left(4-4z+\frac{5}{4}z^2\right)\mathrm{d}z=\frac{10}{3}\pi.$$

七、解：特征方程为$r^2+2r+2=0$，特征根为$r_1=-1+i,r_2=-1-i$，于是对应的齐次方程的通解为

$$\overline{y}=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

对于方程$y''+2y'+2y=2x^2$，因为$\alpha=0$不是特征根，所以特解为$y_1^*=ax^2+bx+c$．代入上述方程，由待定系数法得$a=1,b=-2,c=1$，于是$y_1^*=x^2-2x+1$.

对于方程$y''+2y'+2y=x\mathrm{e}^x$，因为$\alpha=0$也不是特征根，设特解为$y_2^*=(cx+\mathrm{d})\mathrm{e}^x$.代入方程，由待定系数法得$c=\frac{1}{5},d=-\frac{1}{10}$，于是$y_2^*=\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}\right)\mathrm{e}^x$.

原方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x^2-2x+1+\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{10}\right)\mathrm{e}^x.$$

八、证明：由于

$$\int_a^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x > \frac{\lambda-a}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda-a}\int_a^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

引入函数
$$G(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\text{，}$$

只需证明 $G(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调减少即可.

因为
$$G'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x [f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\ .$$

由于当 $t\in[a,x)$ 时 $f(x)-f(t)<0$，可知当 $x\in(a,b)$ 时 $G'(x)<0$.

故要证明的结论成立.

“高等数学 A（上）”期末试题 7

一、填空题

1．设 $\boldsymbol{a}=(1,2,3),\boldsymbol{b}=(1,1,0)$，若非负实数 β 使得 $\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}$ 垂直，则 β 的值为__________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{\sqrt{x}}=$__________.

3．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$____________ .

4．设 $2x-\tan(x-y)=\int_0^{x-y}\sec^2 t\mathrm{d}t$ 确定 $y=y(x)$,则 $y'=$_________.

5．曲线 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ 的所有渐近线为______________________.

6．不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+6}=$___________ .

7．定积分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$________________.

8．微分方程 $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$ 的通解为__________________ .

二、单项选择题

1．设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有（　　）．

（A）$a_n<b_n$对任意n成立；　　（B）$b_n<c_n$对任意n成立；

（C）极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在；　　（D）极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

2．设$y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$，则$x=1$是函数$y$的（　　）．

（A）连续点；　　（B）可去间断点；

（C）跳跃间断点；　　（D）无穷间断点.

3．设定义在$(-\infty,+\infty)$内的函数$f(x)$是奇函数,且在$(-\infty,0)$内有$f'(x)<0,f''(x)<0$,则$f(x)$在$(0,+\infty)$内必有（　　）．

（A）$f'(x)<0,f''(x)<0$；　　（B）$f'(x)<0,f''(x)>0$；

（C）$f'(x)>0,f''(x)<0$；　　（D）$f'(x)>0,f''(x)>0$.

4．设$f(x)$是连续函数,且$F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}}f(t)\mathrm{d}t$,则$F'(x)$等于（　　）.

（A）$-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$；　　（B）$-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$；

（C）$\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$；　　（D）$\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

5．若$f'(x)=\ln(x^2+1)$,且$f(1)=0$,则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

（A）$-2\ln2+3$；　　（B）$2\ln2-3$；

（C）$\ln2-\dfrac{3}{2}$；　　（D）$-\ln2+\dfrac{3}{2}$.

三、解答题

1．设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数,且$f(0)\neq0,f'(0)\neq0$，若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to0$时是比h高阶的无穷小，试求a,b的值.

2．求广义积分$I=\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^4\cdot\sqrt{x^2-1}}$.

3．设由曲线$y=\sqrt{1-x^2}$与直线$y=a$（其中常数a满足$0<a<1$）以及$x=0,x=1$围成的平面图形(如图1中D_1,D_2所占的曲边三角形)绕y轴旋转一周所得旋转体的体积为$V(a)$,求$V(a)$的最小值及最小值点.

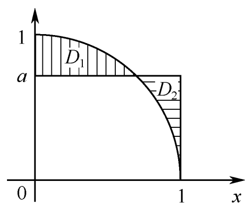


图 1

4．设二阶常系数线性微分方程

$$y''+ay'+by=ce^{x}$$

的一个解为 $y=e^{2x}+(1+x)e^{x}$．试求 a,b,c 的值，并写出方程及其通解.

5．求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ 垂直相交的直线的参数方程.

6．设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单调减少，证明：对任何 $\lambda\in(a,b)$，均有 $\int_a^{\lambda}f(x)dx>\dfrac{\lambda-a}{b-a}\int_a^{b}f(x)dx$.

7．设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有四阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$．证明：必存在 $\xi\in[-a,a]$, 使 $f^{(4)}(\xi)=\dfrac{5!}{2a^5}\int_{-a}^{a}f(x)dx$.

“高等数学 A（上）”期末试题 7 参考答案

一、1． $\beta=\sqrt{7}$；2．1；3． $\dfrac{1}{6}$；4． $y'=1-\cos^2(x-y)=\sin^2(x-y)$；

5．垂直渐近线 $x=0$,斜渐近线 $y=x$；6． $\arctan\dfrac{x+2}{\sqrt{2}}+C$；7． $\dfrac{\pi}{8}$；

8． $y^4=\dfrac{cx}{4-x}$ 或 $(4-x)y^4=cx$.

二、1．D；2．B；3．B；4．A；5．D.

三、1．解：因为 $\lim\limits_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$，

而由 $f(0)\neq 0$ 得

$$a+b-1=0,\qquad (1)$$

又因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{af(h)+bf(h)-f(0)}{h}=0$，利用洛必达法则可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{af'(h)+2bf'(h)}{1}=(a+2b)f'(0)=0,$$

而由 $f'(0)\neq 0$得

$$a+2b=0.\qquad (2)$$

由式（1），式（2）解得 $a=2,b=-1$.

2．解：作变换 $x=\sec\theta$，则

$$I=\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4\cdot\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec\theta\cdot\tan\theta}{\sec^4\theta\cdot\tan\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)^2\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3．解：D_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_1(a)=\pi\int_{a}^{1}(1-y^2)\mathrm{d}y=\pi\left(\frac{2}{3}-a-\frac{a^3}{3}\right).$$

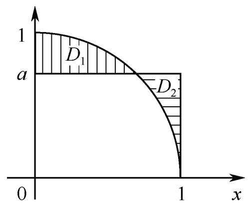


图 1

D_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_2=\pi\int_{0}^{a}1^2\mathrm{d}y-\pi\int_{0}^{a}(1-y^2)\mathrm{d}y=\pi\int_{0}^{a}y^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{3}a^3.$$

所求旋转体的体积为

$$V(a)=V_1(a)+V_2(a)=\pi\left(\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}\right).$$

于是 $V'(a)=\pi(2a^2-1)$．令 $V'(a)=0$ 得驻点 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由于 $V(0)=V(1)=\dfrac{2}{3}\pi,V\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，故最小值为 $V\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，最小值点 $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4．解：由 $y=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$，有

$$y'=2\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+(1+x)\mathrm{e}^x,\quad y''=4\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+(1+x)\mathrm{e}^x,$$

代入原方程，得

$$(4+2a+b)\mathrm{e}^{2x}+(3+2a+b)\mathrm{e}^x+(1+a+b)x\mathrm{e}^x=c\mathrm{e}^x.$$

由于 e^{2x}，e^x，$x\mathrm{e}^x$ 线性无关，所以必有

$$4+2a+b=0,3+2a+b=c,1+a+b=0.$$

解之，得
$$a=-3,b=2,c=-1.$$

故方程为
$$y''-3y'+2y=-\mathrm{e}^x.$$

齐次方程的通解为
$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x},$$

再由所给特解，可得原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x.$$

5．解：直线 L 上取一点 $P(1,2,3)$，则 $M_0P = \{0,1,2\}$.

设所求直线 L^* 的方向向量为 $\boldsymbol{s}^* = \{l,m,n\}$，而 L 的方向向量 $\boldsymbol{s} = \{1,2,3\}$.

由 $\boldsymbol{s}^* \perp \{1,2,3\}$，有 $l + 2m + 3n = 0$.

又有 $\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{s}, M_0P$ 共面，故 $\begin{vmatrix} l & m & n \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$，即 $l - 2m + n = 0$.

从而可得 $l = 4m, n = -2m$.

令 $m = 1$，有直线方程

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

其参数方程为 $\begin{cases} x = 1 = 4t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

6．证明：由于

$$\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x > \frac{\lambda - a}{b - a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{1}{\lambda - a}\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

作函数 $G(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则只需证 $G(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上单调减少.

$$G'(x) = \frac{f(x)}{x-a} - \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x [f(x) - f(t)]\mathrm{d}t.$$

由于 $f(x) - f(t) < 0, \forall t \in [a,x)$，所以当 $x \in (a,b]$ 时有 $G'(x) < 0$, 故所要证明的不等式成立.

7．解：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3} = 1$，得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{3x^2} = 1$，得 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{6x}=1$，得 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)=0=f''(0)$. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)}{6}=\dfrac{f'''(0)}{6}=1\Rightarrow f'''(0)=6$.

从而存在 η 介于 0 与 x 之间，使

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^4=x^3+\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^4.$$

由 $f^{(4)}(x)\in C[-a,a]$，知 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，即

$$m\leqslant f^{(4)}(\eta)\leqslant M\Rightarrow mx^4\leqslant f^{(4)}(\eta)x^4\leqslant Mx^4,$$

则
$$m\int_{-a}^{a}x^4\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\eta)x^4\mathrm{d}x\leqslant M\int_{-a}^{a}x^4\mathrm{d}x, \tag{1}$$

所以
$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}x^3\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^4\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}x^4\mathrm{d}x. \tag{2}$$

由式（1）知
$$m\leqslant\frac{\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\eta)x^4\mathrm{d}x}{2a^5/5}\leqslant M.$$

由介值定理知，$\exists\xi\in[-a,a]$ 使

$$\frac{\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\eta)x^4\mathrm{d}x}{2a^5/5}=f^{(4)}(\xi),$$

即
$$\int_{-a}^{a}f^{(4)}(\eta)x^4\mathrm{d}x=f^{(4)}(\xi)\cdot\frac{2}{5}a^5. \tag{3}$$

式（3）代入式（2），得

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\frac{2}{5}a^5,$$

故
$$f^{(4)}(\xi)=\frac{5!}{2a^5}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

“高等数学 A（上）”期末试题 8

一、填空题

1．已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$____________ .

2．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x}\right)^{bx+d}=$________________.

3．已知当 $x \to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小量，则常数 $a=$______．

4．设 $\varphi(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导，$F(x)=f[\varphi(x)]$，则 $F'(0)=$______.

5．曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点是______.

6．不定积分 $\int\dfrac{dx}{x^2+2x+2}=$______.

7．定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^6 x}{\sin^6 x+\cos^6 x}dx=$______.

8．常微分方程 $y'=(x+y+1)^2$ 的通解为______.

二、单项选择题

1．设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)dt, g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（ ）.

（A）等价无穷小；（B）同阶但非等价无穷小；

（C）高阶无穷小；（D）低阶无穷小.

2．设可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(\cos^2 x)=\sin^2 x, f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于（ ）.

（A）$\cos x+\dfrac{1}{2}\cos^2 x$；（B）$\cos^2 x-\dfrac{1}{2}\cos^4 x$；

（C）$x+\dfrac{1}{2}x^2$；（D）$x-\dfrac{1}{2}x^2$.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)<0, f'(x)\geqslant k>0$, 则在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$ （ ）.

（A）没有零点；（B）至少有二个零点；

（C）只有一个零点；（D）有无零点不能确定.

4．设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x dx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx$，$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$，则（ ）.

（A）$N<P<M$；（B）$M<P<N$；

（C） $N < M < P$； （D） $P < M < N$.

5．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $f(0)=0$，令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，则必有（　　）.

（A） $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}$； （B） $\frac{M}{2}\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M$；

（C） $M\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2M$； （D） $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x\geqslant 2M$.

三、解答题

1．设当 $0<x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x^{\sin x}$,对其他 x, $f(x)$ 满足 $f(x)+k=2f(x+1)$, 求常数 k 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2．计算广义积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}}$.

3．如图 1 所示，设曲线段 L 是抛物线 $y=6-2x^2$ 在第一象限内的部分.在 L 上求一点 M，使过点 M 的切线 AB 与两坐标轴和 L 所围图形的面积最小，并求出最小面积.

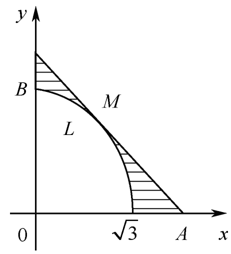


图 1

4．求微分方程 $y''+y=x+\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

5．求过点 $M_0(1,2,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases}x+2y-z+1=0\\x-y+z-1=0\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}2x-y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}$ 平行的平面方程.

6．设 $f(x)$ 为连续的正值函数,试证明当 $0<a<b$ 时，恒有

$$\int_0^b t^2 f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^a f(t)\mathrm{d}t>\int_0^a t^2 f(t)\mathrm{d}t\cdot\int_0^b f(t)\mathrm{d}t.$$

7．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)<0, f(1)<1,\ \int_0^1(f(x)-x)\mathrm{d}x>0$，求证：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+\xi^2(f(\xi)-\xi)=1$.

“高等数学 A（上）”期末试题 8 参考答案

一、1． $-\frac{3}{2}$； 2． e^{ab}； 3． $a=-3/2$； 4． 0； 5． $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{3}{4}\right)$； 6． $\arctan(x+1)+C$；

7． $\frac{\pi}{4}$； 8． $\arctan(x+y+1)=x+c$.

二、1．(B)；2．(D)；3．(C)；4．(D)；5．(A).

三、1．解：由题设有 $f(x)=2f(x+1)-k$，当 $-1<x\leqslant 0$ 时,有 $0<x+1\leqslant 1$，于是

$$f(x)=2(x+1)^{\sin(x+1)}-k.$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}[2(x+1)^{\sin(x+1)}-k]=2-k\,, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}\,, \tag{2}$$

而
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\cos x/\sin^2 x}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=0\,,$$

由式（2）得

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^{\sin x}=\mathrm{e}^0=1. \tag{3}$$

由式（1）、式（3）知，当 $k=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

2．解：设 $\mathrm{e}^{x-1}=t$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$；当 $x=1$ 时,$t=1$；当 $x\to+\infty$ 时,$t\to+\infty$.

故
$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\arctan t\,\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

3．解：如图 1 所示，设曲线 L 上点 M 的坐标为 $(x,6-2x^2)$，则 L 在该点的切线方程为

$$Y=6-2x^2-4x(X-x).$$

令 $Y=0$，可得点 A 的横坐标为 $a=\frac{3+x^2}{2x}$，

令 $X=0$，可得点 B 的纵坐标为 $b=2(3+x^2)$，从而所求图形的面积为

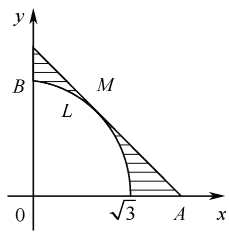


图 1

$$S=\frac{1}{2}ab-\int_0^{\sqrt3}(6-2x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{3+x^2}{2x}\cdot 2(3+x^2)-\left(6\sqrt3-2\sqrt3\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3+x^2}{x}\cdot(3+x^2)-4\sqrt3\,.$$

令 $S'(x)=\frac{3}{x^2}(3+x^2)(x^2-1)=0$，解得大于零的驻点 $x_0=1$.

易判别当 $x=1$ 时面积 $S(x)$ 最小，即求点为 $M(1,4)$.

最小面积为 $S(1)=8-4\sqrt{3}$.

4．解：原方程对应的齐次方程为 $y''+y=0$，特征方程为 $r^2+1=0$，特征值为 $r_1=\mathrm{i}, r_2=-\mathrm{i}$.
齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x.\ \ C_1，C_2 \text{为任意常数.}$$

设非齐次方程 $y''+y=x$ 的一个特解为 $y_1=ax+b$，代入此方程，得 $a=1,b=0$，所以 $y_1=x$.

设非齐次方程 $y''+y=\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解为

$$y_2=A\mathrm{e}^{2x},$$

代入此方程，得 $A=\dfrac{1}{5}$，所以 $y_2=\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}$.

故原方程的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}.$$

5．解：直线 L_1 的方向向量

$$\boldsymbol{s}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,-2,-3),$$

直线 L_2 的方向向量

$$\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-1,-1).$$

平面的法方向与两直线垂直，所以

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,-1).$$

所求平面方程为

$$-(x-1)+(y-2)-(z-1)=0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

6．证明：不等式等价于

$$\frac{\int_0^b t^2 f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^b f(t)\mathrm{d}t}>\frac{\int_0^a t^2 f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^a f(t)\mathrm{d}t}.$$

令函数 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$,则只要证明 $\varphi(x)$ 严格单调递增.

$$\varphi'(x)=\left(\frac{\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\right)'=\frac{x^2 f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)\int_0^x f(t)(x^2-t^2)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

由于 $f(x)$ 且 $f(x)>0$,所以当 $x>0$ 时， $f(x)\int_0^x f(t)(x^2-t^2)\mathrm{d}t>0\Rightarrow\varphi'(x)>0.$

故 $\varphi(x)$ 严格单调递增.

7．证明：作辅助函数 $g(x)=f(x)-x$ ，则

$$g(0)=f(0)<0,g(1)=f(1)-1<0.$$

由积分中值定理知，存在 $\eta\in(0,1)$ ，使得

$$\int_0^1(f(x)-x)\mathrm{d}x=f(\eta)-\eta>0.$$

由连续函数的零点定理知，$\exists\xi_1\in(0,\eta),\xi_2\in(\eta,1)$ ，使得

$$g(\xi_1)=0,g(\xi_2)=0.$$

设 $F(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x^3}(f(x)-x)$ ，所以 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 可导，又 $F(\xi_1)=0,F(\xi_2)=0.$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理知， $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$ ，使 $F'(\xi)=0.$

于是推得 $$f'(\xi)+\xi^2(f(\xi)-\xi)=1.$$

“高等数学 A（上）”期末试题 9

一、填空题

1．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 2x}=$________________ .

2．设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x^3}-1}{\sin x\cdot\ln(1+x^2)}=$______________.

3．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+\tan 2x)}{x}, & x<0\\(x+k)^3, & x\geqslant 0\end{cases}$ 处处连续，则 $k=$________.

4．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}+\ln\dfrac{y}{x+1}=0$ 所确定，则 $y'(0)=$________.

5．设 $f(x)=x^2\sin x$，则对于 $n\geqslant 1$, $f^{(2n)}(0)=$________.

6．曲线 $y=\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ 的拐点是________________.

7．$\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=$________________.

8．设 $f(x)$ 是连续函数，且满足关系式 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+2\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________.

9．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+10}=$________________.

10．微分方程 $y'+y\tan x=\sin 2x$ 的通解为________________.

二、设 a 为常数，并设 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{4+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{a\sin x}{|x|}\right)$ 存在，求常数 a 的值.

三、设 $y=y(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{y}{1+x}\Delta x+\alpha(\Delta x)$, 其中 $\alpha(\Delta x)$ 满足 $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$，若已知 $y(2)=5$，（1）求曲线 $y=y(x)$ 上点 $(2,5)$ 处的切线方程；（2）求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{y(2-x)-y(x+2)}{2x}$.

四、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\quad f(1)=1,\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2.$ 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0.$

五、求函数 $y=(x-2)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的增减区间、极值点和极值，指明是极大值还是极小值.

六、计算积分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+\sin x^3}{|x|+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

七、过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.（1）求 D 的面积；（2）求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

八、求微分方程 $y''+2y'-3y=x(2+\mathrm{e}^x)$ 的通解.

“高等数学 A（上）”期末试题 9 参考答案

一、1．$\dfrac{\sqrt{2}}{32}$；2．2；3．$k=\sqrt[3]{2}$；4．$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$；5．0；6．$(1,0)$；

7．$\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\dfrac{x-3}{2}+c$；8．$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{\pi}{2}$；9．$\dfrac{\pi}{2}-\arctan 3$；

10．$y=C\cos x-2\cos^2 x$.

二、解：$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{4+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{a\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{4+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\dfrac{a\sin x}{x}\right)=4-a$，

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{a\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{a\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(4\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1)}{\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}(4\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1)}+a=a.$$

因题设极限存在，其充分必要条件是左、右极限存在且相等，于是

$$4-a=a\Rightarrow a=2.$$

三、解：（1）由函数可微的定义可知

$$y'(2)=\left.\frac{y}{1+x}\right|_{x=2}=\frac{5}{3},$$

曲线上点 $(2,5)$ 处的切线方程为 $y-5=\dfrac{5}{3}(x-2)$.

（2）
$$\lim_{x\to 0}\frac{y(2-x)-y(x+2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{[y(2-x)-y(2)]-[y(x+2)-y(2)]}{2x}$$

$$=-y'(2)=-\frac{5}{3}.$$

四、证明：由 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ 及积分中值定理知，存在 $\eta\in[0,1]$，使得 $f(\eta)(1-0)=2$，即 $f(\eta)=2$.

因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故存在最大值，但 $f(\eta)=2$，$f(0)=0$，$f(1)=1$，可知最大值点必在 $(0,1)$ 内.

设最大值点为 $\xi\in(0,1)$，则该点必为极大值点，又 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 可导，故必有 $f'(\xi)=0$.

五、解：函数处处连续. 当 $x\neq -1$ 时函数可导，而 $x=-1$ 是函数非可导点.

当 $x \neq -1$ 时，
$$y' = 2(x-2)(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^2 \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{2(x-2)(4x+1)}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{3}\frac{(x-2)\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{4}$.

当 $x < -1$ 时，$y' < 0$，函数单调递减；当 $-1 < x \leqslant -\frac{1}{4}$ 时，$y' > 0$，函数单调递增.

当 $-\frac{1}{4} < x \leqslant 2$ 时，$y' < 0$，函数单调递减，当 $x > 2$ 时，$y' > 0$，函数单调递增.

由极值的第一充分条件知：

$x=-1$ 是极小值点，该极小值为 $f(-1)=0$；

$x = -\frac{1}{4}$ 是极大值点，该极大值为 $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$.

六、解：$I = \int_{-1}^{1} \frac{1+\sin x^3}{|x| + \sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x| + \sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^{1} \frac{\sin x^3}{|x| + \sqrt{1-x^2}} dx$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{|x| + \sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} dx.$$

令 $x = \sin t$，则
$$\int_0^1 \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt,$$

再作变换 $u = \frac{\pi}{2} - t$，则
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin u}{\cos u + \sin u}(-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos t}{\sin t + \cos t} + \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \right) dt = \frac{\pi}{4}.$$

所以原积分 $I = \frac{\pi}{2}$.

七、解：设切点为 $(x_0, \ln x_0)$，曲线在该点处的切线为

$$y-\ln x_0=(\ln x)'|_{x=x_0}\ (x-x_0)\text{，}$$

即
$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

因切线过原点 $(0,0)$，易得 $x_0=\mathrm{e}$，所以该切线的方程为 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$.

图形 D 的面积为

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\mathrm{d}y=\left[\mathrm{e}^y-\frac{\mathrm{e}}{2}y^2\right]\Bigg|_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2}-1.$$

切线 $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体的体积为 $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2$.

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\left[\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{2y}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\pi\left[\mathrm{e}^2y-2\mathrm{e}\mathrm{e}^y+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]\Bigg|_0^1=\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-\frac{1}{2}\right).$$

所以
$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5\mathrm{e}^2-12\mathrm{e}+3).$$

八、解：对应齐次线性微分方程为 $y''+2y'-3y=0$.特征方程为 $r^2+2r-3=0$，特征根为 $r_1=-3,r_2=1$. 齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^x\text{，}\ C_1,C_2\text{为任意常数.}$$

对于非齐次微分方程 $y''+2y'-3y=2x$，可令特解为

$$y_1^*=ax+b\text{，}$$

代入该方程解得 $a=-\dfrac{2}{3},b=-\dfrac{4}{9}$，所以 $y_1^*=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{4}{9}$.

对于 $y''+2y'-3y=x\mathrm{e}^x$，可令特解为

$$y_2^*=x(cx+d)\mathrm{e}^x,$$

代入方程解得 $c=\dfrac{1}{8},d=-\dfrac{1}{16}$，所以 $y_2^*=x\left(\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{6}\right)\mathrm{e}^x$.

特解为
$$y^*=y_1^*+y_2^*=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}+x\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^x.$$
所求通解为
$$y=\overline{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^x-\frac{2}{3}x-\frac{4}{9}+x\left(\frac{1}{8}x-\frac{1}{6}\right)\mathrm{e}^x,$$
其中 C_1,C_2 为任意常数.

三、“高等数学 A（下）”期中试题

“ 高等数学 A（下）” 期中试题 1

注意：级数的敛散性指条件收敛、绝对收敛或发散.

1．设函数 $\boldsymbol{f(x,y)=x\sin\sqrt{1-x^2-y^2}+y\cos x}$，则 $f_y(0,0)=$________.

2．函数 $f(x,y,z)=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点(1,2,3)处的方向导数的最小值为________.

3．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}=$____________.

4．设函数 $u=f(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数，方程 $\mathrm{e}^{xy}-xy=2,\mathrm{e}^x=\int_0^{x-z}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 确定了函数 $y=y(x),z=z(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=$________.

5．已知函数 $f(x)=2+|x|,-1\leqslant x\leqslant 1$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则展开系数 $a_3=$________.

6．母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为________________ .

7．设 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时 $z=x^2$，则函数 $z=$________.

8．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos\frac{1}{n^2}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}}$ 的敛散性为________________.

9．级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$ 的敛散性为 ________________.

10．已知函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$在$x=3$时发散，在$x=-1$时收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$的收敛域为________.

11．数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n!}$的和等于____________________.

12．设$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=1$，则以向量$\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$为边的平行四边形的面积为________.

13．若直线$x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$与直线$x+1=y-1=z$相交，则$\lambda=$________.

14．设二元函数$z=z(x,y)$由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定，则 z 在点（1，0，−1）处的全微分 dz=____________________ .

15．设$z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yg(x+y)$，其中函数$f,g$具有二阶连续导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

16．“$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续”是函数$z=f(x,y)$在该点可偏导的________________________条件.（填写：必要，充分，充分必要，既非充分又非必要）.

17．函数$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$在$x=1$处的幂级数展开式为________.

18．设方程$z=x^2+y^2,x^2+2y^2+3z^2=20$确定函数$y=y(x),z=z(x)$，则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$________.

19．旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点(2,1,4)处的切平面是________.

20．设$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且$f(1,1)=1, f_1'(1,1)=3, f_2'(1,1)=4$，又$F(x)=f(x,f(x,x))$，则$F'(1)=$__________________.

“高等数学 A（下）”期中试题 1 参考答案

1．1；2．$-\dfrac{\sqrt{14}}{14}$；3．0.（提示：$\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}\leqslant\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x+y}}+\dfrac{y^2}{\mathrm{e}^{x+y}}<\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{y^2}{\mathrm{e}^y}\to 0$）；

4．$f_1-\dfrac{y}{x}f_2+\left(1-\dfrac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right)f_3$；5．$-\dfrac{4}{9\pi^2}$；6．$3y^2-z^2=16$；

7．$z=2y+(x-y)^2$；8．收敛；9．条件收敛；10．$[-3,1)$；11．2e；

12．11；13． $\lambda=\dfrac{5}{4}$；14． $\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y$；15． $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf''+g'+yg''$；

16．既非充分也非必要；17． $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n,|x-1|<1$；

18． $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{3z+1}$；19． $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$ 或 $4x+2y-z-6=0$；20．31.

“高等数学 A（下）”期中试题 2

注意：级数的敛散性指条件收敛、绝对收敛或发散.

1．若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^m y}{(x^2+y^2)^2}=0$，则 m 的取值范围是________.

2．函数 $f(x)=2+|x|,-1\leqslant x\leqslant 1$ 的傅里叶级数展开式为 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，则展开式中的系数 $a_4=$________.

3．已知 $|\boldsymbol{a}|=10,|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$________.

4．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{2n}}{2^n+(-5)^n}$ 的收敛域为________.

5．若 (x_0,y_0,z_0) 是曲面 $F(x,y,z)=0$ 上的一点，且在这一点处有 $F_x=4\sqrt{2},F_y=F_z=4$，则曲面在这一点处的切平面与 xy 平面所成的二面角是________.

6．设方程 $x^2+y^2+z^2-2y=0$，$x-3y+5z-4=0$ 确定 $x=x(y)$，$z=z(y)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=$________.

7．设 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=$________.

8．已知 $z=x^2+3xy+y^2$，写出该曲面被平面 $y=2$ 所截曲线在点 $(1,2,11)$ 处的切线方程________.

9．已知函数 $f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$，求 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}=$________.

10．与 x 轴的距离为 3，与 y 轴的距离为 2 的一切点所确定的曲线在 xOy 平面上的投影方程为________.

11．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(1-\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$ 的敛散性为________.

12．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}}}$的敛散性为________.

13．若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$在$x=3$时条件收敛，则幂级数的收敛半径为________.

14．数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}=$的和等于________.

15．设$f(x,y)$具有一阶连续导数，且$f(0,0)=0, f_x(0,0)=0, f_y(0,0)=0$，函数$F(t)=tf(t,f(t,t))$，则$F'(0)=$________.

16．设$\boldsymbol{l}^0=(\cos\theta,\sin\theta), f(x,y)=x^2-xy+y^2$，问$\theta=$________时，在点（1，1）沿$\boldsymbol{l}^0$的方向导数取得最大值？

17．将函数$f(x)=\ln(x+1)$展开为$x-1$的幂级数为________.

18．“$f_x(x,y), f_y(x,y)$在点(x_0,y_0)存在”是函数$z=f(x,y)$在该点可微的__________________条件.（填写：必要、充分、充分必要、既非充分又非必要）

19．设$z=\int_{x-2y}^{x+2y}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，则$z_{xy}(1,1)=$________.

20．设方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$确定函数$z=f(x,y)$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$________，$\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

“高等数学 A（下）”期中试题 2 参考答案

1．$m>3$；2．0；3．16；4．$\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$；5．$\frac{\pi}{3}$；6．$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{3x+y-1}{5x+z}$；

7．0；8．$\begin{cases}z-11=8(x-1)\\y=2\end{cases}$或$x-1=\frac{y-2}{0}=\frac{z-11}{8}$；9．$\mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}=\frac{1}{4}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$；

10．$\begin{cases}y^2-x^2=5\\z=0\end{cases}$；11．绝对收敛；12．发散；13．4；14．$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$；15．$a+b(a+b)$；

16．$\theta=\frac{\pi}{4}$；17．$\ln(1+x)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,-1<x\leqslant 3$；

18．必要条件；19．$z_{xy}(1,1)=12\mathrm{e}^9-4\mathrm{e}$；20．$\frac{z}{x+z},\frac{z^2}{y(x+z)}$.

“高等数学 A（下）”期中试题 3

注意：级数的敛散性指条件收敛、绝对收敛或发散.

1．设函数 $f(x,y)=x^{y^2}$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(2,1)}=$________.

2．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!}$ 的和函数为________.

3．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+x)^{\frac{1}{x+x^2y}}=$________.

4．把函数 $f(x)=x\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$ 展开为正弦级数________________.

5．函数 $f(x)=\int_0^x\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$ 的麦克劳林级数为________________.

6．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 的敛散性为________.

7．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ 的敛散性为________.

8．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n^2}x^n$ 的收敛半径 R 为________.

9．数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!2^n}$ 的和等于________.

10．函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n\cos x+n\sin x)^2}$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是否一致收敛________.

11．已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 R=1，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ 的收敛半径 R=________.

12．已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在 P 点处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则 P 点的坐标是________.

13．设函数 $u(x,y)=\varphi(y-x)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{y-x}\phi(t)\mathrm{d}t$，其中 φ，ϕ 二阶可导，则必有________.

（A）$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$；　　（B）$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$；

（C）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；　　　　（D）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

14．设 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$ ，其中 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$________.

15．设 $u=z\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ，则函数 u 在点（1,1,2）的全微分为________.

16．设 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$，其中 f,φ 均有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$________.

17．函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{3-x}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为________.

18．下列论述正确的是________.

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n \quad ,(u_n>0)$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（D）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

19．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$ ，$f_y'(x_0,y_0)$ 存在，是 $f(x.y)$ 在该点连续的___________.

（A）充分条件而非必要条件；　　　　（B）必要条件而非充分条件；

（C）充分必要条件；　　　　（D）既非充分条件又非必要条件.

20．设函数 $f(x.y)$ 在点（0,0）的附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3, f_y'(0,0)=1$ ，则___________.

（A）$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$ ；

（B）曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$ ；

（C）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$ ；

（D）曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

“高等数学 A（下）”期中试题 3 参考答案

1．$\ln 2+1$；2．$s(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}-1, & x\neq 0\\ 0 \quad , & x=0\end{cases}$；3．e；4．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x,\ 0\leqslant x\leqslant 1$；

5．$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{(2n)!n},\ x\in(-\infty,\infty)$；6．收敛；7．条件收敛；8．1；9．$\dfrac{3}{2}\sqrt{\mathrm{e}}-1$；

10．是；11．∞；12．（1,1,2）；13．B；14．1；15．$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\mathrm{d}z$；

16．$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x^3}f''\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{2x}{y^2}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$；

17．$f(x)=-\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n n}(x-1)^n,\ -1\leqslant x<3$；18．B；19．D；20．C.

“高等数学 A（下）”期中试题 4

注意：级数的敛散性指条件收敛、绝对收敛或发散.

1．设函数 $f(x,y)=y^x$，则 $f_{xy}(0,1)=$________.

2．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$ 的和函数为________.

3．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$________.

4．设函数 $f(x)=x(0\leqslant x<2\pi)$ 的周期为 2π，则其傅里叶级数在 $x=4\pi$ 处的值为_______.

5．级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(\cos n\pi)\ln n}{n}$ 的敛散性为________.

6．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ 的收敛半径为________.

7．数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和为________.

8．函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否一致收敛________.

9．设 $\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1}) = 3$，且 $\lim_{n\to\infty} nu_n = 5$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n =$________.

10．曲面 $z - \mathrm{e}^z + 2xy = 3$ 在（1,2,0）处的切平面方程为______________.

11．设函数 $u(x,y) = \varphi(y-x) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{y-x} \phi(t)\mathrm{d}t$，其中 φ，ϕ 二阶可导，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 之间有关系式______________.

12．设 $u = f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y = y(x), z = z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy} - y = 0,\ \mathrm{e}^z - xz = 0$ 所确定，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} =$________.

13．设函数 $z = x\mathrm{e}^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)} =$________.

14．设 $z = f\left(\frac{y}{x}\right) + 2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 f, φ 均有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$________.

15．函数 $f(x) = \ln\frac{1}{3-x}$ 展开成 x 的幂级数为______________.

16．已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 发散，则________.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛；　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散；

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛；　　（D）$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

17．二元函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点（0,0）处________.

（A）连续、偏导数存在；　　（B）连续、偏导数不存在；

（C）不连续、偏导数存在；　　（D）不连续、偏导数不存在.

18．设函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）的附近有定义，且 $f_x'(0,0) = 3, f_y'(0,0) = 1$，则________.

（A）$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)} = 3\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$；

（B）曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\{3,2,1\}$；

（C）曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\{1,0,3\}$；

（D）曲线$\begin{cases} z=f(x.y) \\ y=0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$.

19．当a满足________条件时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{3^n-n}(a>0)$收敛.

20．设方程$xu-yv=0$，$yu+xv=1$确定函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$则在$x=1$，$y=1$，$u=\dfrac{1}{2}$，$v=\dfrac{1}{2}$处$\mathrm{d}u=$________，$\mathrm{d}v=$________.

“高等数学A（下）”期中试题4参考答案

1．1；2．$s(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$；3．e；4．$\pi$；5．条件收敛；
6．2；7．1；8．是；9．2；10．$2(x-1)+(y-2)=0$或$2x+y=4$；
11．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；12．$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x+\dfrac{y^2 f_y}{1-xy}+\dfrac{zf_z}{xz-x}$，注：$y=\mathrm{e}^{xy},\mathrm{e}^z=xz$；

13．$\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=2\mathrm{e}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}+2)\mathrm{d}y$；14．$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{1}{x^2}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x^3}f''\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{2x}{y^2}\varphi''\left(\dfrac{x}{y}\right)$；

15．$f(x)=-\ln 3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n n},-3\leqslant x<3$；16．B；17．C；18．C；

19．$0<a<3$；20．$\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}v=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}y$

“高等数学A（下）”期中试题5

1．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\alpha}}$，当$\alpha$满足________时，级数收敛.

2．级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n^2}$是________（条件收敛，绝对收敛或发散）.

3．设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$在$x=-2$处收敛，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$的收敛半径$R$满足______.

4．函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{x}\ln(1+x), & x>-1且x\neq 0, \\ 1, & x=0 \end{cases}$的二阶麦克劳林级数展开式为____________.

5．当p值满足条件________时，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right), p>0$条件收敛.

6．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot[2^n+(-1)^n]}(x+1)^n$ 的收敛域为________.

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!}x^{2n-1}$ 的和函数为________________.

8．设 $f(x)=x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$，它的以 2π 为周期的余弦级数的和函数为 $s(x)$，则 $s\left(\frac{3\pi}{2}\right)=$___.

9．设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$，它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)=$________.

10．函数 $f(x,y)=\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arccos\frac{1}{x^2+y^2}$ 的定义域为________.

11．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}-1}\arctan\frac{1}{x^2+y^2}=$________.

12．设 $u=u(x,y)$ 为可微函数，且当 $y=x^2$ 时，有 $u(x,y)=1$ 及 $\frac{\partial u}{\partial x}=x$，则当 $y=x^2\ (x\neq 0)$ 时，$\frac{\partial u}{\partial y}=$________.

13．设函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x-y}+\arcsin\frac{y(x-2)}{y^2+(x-2)^2}$，则 $f_y(2,3)=$________.

14．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f_y(x,y)=$________.

15．设函数 $z=\int_{x-y}^{x+y}\sin t^2\mathrm{d}t$，则 $z_{yx}=$________.

16．设 $z=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy)$，则 $\mathrm{d}z=$________.

17．设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，g 具有连续的二阶导数，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

18．设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=$________.

19．球面 $x^2+y^2+z^2=\dfrac{3}{2}$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程为________.

20．函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在 $A(1,0,1)$ 点处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为________.

“高等数学 A（下）”期中试题 5 参考答案

1．$\alpha>\dfrac{1}{2}$；2．绝对收敛；3． $R\geqslant 4$；4． $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}x^2+o(x^2)$；

5．（注意：此级数非正项级数.）$\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$， $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)=\dfrac{(-1)^n}{n^p}-\dfrac{1}{2n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)$；

6．$-3\leqslant x<1$；7． $\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}x\cos x\quad(-\infty<x<+\infty)$；8． $\dfrac{\pi^2}{4}$；

9． $s(x)=\begin{cases}1+x, & 2k\leqslant x<2k+1,\\ 1, & 2k-1<x<2k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ \dfrac{3}{2}, & x=2k-1,\end{cases}$；（注：此处给出一个周期的和函数即可.）

10． $\{(x,y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$；11．0；12． $-\dfrac{1}{2}$；13． $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；

14． $f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

15． $z_{yx}=2(x+y)\cos(x+y)^2+2(x-y)\cos(x-y)^2$；

16． $\mathrm{d}z=(2xf_1'+2xf_2'+2yf_3')\mathrm{d}x+(2yf_1'-2yf_2'+2xf_3')\mathrm{d}y$；

17． $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''-\dfrac{x}{y^2}f_{12}''\right)-\dfrac{f_2'}{y^2}+\dfrac{1}{y}\left(xf_{21}''-\dfrac{x}{y^2}f_{22}''\right)-\dfrac{1}{x^2}g'-\dfrac{y}{x^3}g''$；

18． $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos x-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x)$；

19． $x-y+2z\pm 3=0$；20． $\dfrac{1}{2}$.

“高等数学 A（下）”期中试题 6

1．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^{\alpha}}$，当$\alpha$满足________时，级数收敛.

2．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ 是________（条件收敛，绝对收敛或发散）.

3．设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径 $R=3$，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}(x-1)^{n+2}$ 的收敛区间为________.

4．函数 $\dfrac{1}{x(1-x)}$ 在 $x_0=-1$ 处的泰勒级数展开式为________________.

5．当 p 值满足条件________时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}, p>0$ 条件收敛.

6．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n^2}}{3^n}$ 的收敛域为________.

7．级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{(2n)!\cdot 2^{2n}}x^{2n+1}$ 的和函数为________；级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{(2n)!}$ 的和为________.

8．设 $f(x)=\pi-x\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$，它的以 2π 为周期的正弦级数的傅里叶系数 $b_4=$________.

9．函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$ 的定义域为________.

10．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\ln(x^2+y^2)=$________.

11．函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 是________（连续的还是间断的）.

12．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2y)}{xy}, & xy\neq 0,\\ x, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_y(1,0)=$________.

13．函数 $u(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x-y$，则 $u(x,y)$ 可取________.

14．设函数 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$________.

15．设 $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，则 $\mathrm{d}u\,|_{(1,1,1)}=$________.

16．设 $z=f\left(\dfrac{y}{x},x^2y\right)+g(xy)$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，g 具有连续的二阶导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

17．设 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xy\mathrm{e}^z=0$ 确定的函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$________.

18．曲线 $x=\dfrac{t}{1+t}$，$y=\dfrac{1+t}{t}$，$z=t^2$ 在 $t=2$ 处的切线方程为________________.

19．函数 $z=xy$ 在点 $(1,2)$ 处的最小方向导数为________.

“高等数学 A（下）”期中试题 6 参考答案

1．$\alpha>\dfrac{1}{2}$；2．条件收敛；3．$(-2,4)$；4．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-1\right)(x+1)^n \quad (-2<x<0)$；

5．（注意：此级数非正项级数，也非莱布尼茨型级数.）$0<p\leqslant 1$；

$$\frac{(-1)^{n-1}}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\frac{1}{\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^p}=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}+\frac{p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$$；

6．$[-1,1]$；7．$x\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}x^2\sin\dfrac{x}{2}$；$\cos 1-\dfrac{1}{2}\sin 1$；8．$\dfrac{1}{2}$；

9．$\{(x,y)\,|\,x-\sqrt{y}>0,y\geqslant 0\}$；10．0；11．连续；12．$-\dfrac{1}{2}$；

13．$x^2y-\dfrac{x}{2}y^2+C_1(x)+C_2(y)$；（填写任一个即可） 14．$-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}$；15．$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$；

16．$-\dfrac{y}{x^3}f_{11}''+yf_{12}''+2x^3yf_{22}''-\dfrac{1}{x^2}f_1'+2xf_2'+g'+xyg''$；17．$3+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$；

18．$\dfrac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}}=\dfrac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{4}}=\dfrac{z-4}{4}$；19．$-\sqrt{5}$.

“高等数学 A（下）”期中试题 7

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 的敛散性为________.

2．级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}+\cdots$ 的敛散性为_____.

3．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n\ (u_n>0,\ n=1,2,\cdots)$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}u_{2n}$ 的敛散性为______.

4．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-2$ 处条件收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x+1)^n$ 的收敛区间为_______.

5．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{n^2}(x+1)^n$ 的收敛域为________.

6．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n$ 的和函数为________________.

7．函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为______________________.

8．设函数 $f(x)$ 的周期为 2， $f(x)=1+x\ (-1\leqslant x<1)$，它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s\left(-\frac{5}{2}\right)=$________.

9．函数 $f(x)=x\ (0\leqslant x\leqslant \pi)$ 的余弦级数为_________________.

10．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin xy}{x^2+y^2}=$________.

11．设 $f(x,y)=\sin\frac{(x-1)\mathrm{e}^y+xy}{2x+(x-1)^2y}$， 则 $f_y\left(1,\frac{\pi}{3}\right)=$________.

12．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\cos(x+y)-x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f_x(0,0)=$________.

13．设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sin\frac{y}{x}}$， 则 $f_{yx}(2,\pi)=$________.

14．设 $z=\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}}$， 则 $\mathrm{d}z|_{(-1,2)}=$________.

15．设 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数， $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$， 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}=$________.

16．设函数 $z = x\,f(x,u)$ 有一阶连续偏导数，而 $u = u(x,y)$ 由方程 $\int_{u-2y}^{2u+x} e^{t^2}\,dt = 1$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

17．曲面 $z = x^2 - y^2$ 上点 $(1,-1,0)$ 处的切平面方程为__________________.

18．函数 $u = xy^2 z$ 在点 $(1,-1,1)$ 处沿方向 $\{2,-2,1\}$ 的方向导数为__________.

19．设函数 $z = z(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$，且 $z(x,0) = 4x - x^2$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,0)} = -4$，则 $z(x,y)$ 的表达式为_________________.

20．上题中 $z(x,y)$ 的极值为________.（包括极大值、极小值，极值点）

“高等数学 A（下）”期中试题 7 参考答案

1．发散；2．发散；3．发散；4．$(-4,2)$；5．$\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right]$；

6．$\begin{cases} -\frac{\ln(1-x)}{x}, & x \in [-1,1)\ x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$；7．$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (x-1)^{n-1}$，$x \in (0,2)$；

8．$\frac{1}{2}$；9．$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$，$x \in [0,\pi]$；10．0；11．$\frac{\sqrt{3}}{4}$；12．$-\frac{1}{2}$；13．$\frac{\pi}{8}e$；

14．$4e^{-4}(-dx + dy)$；15．$r\sin\theta\cos\theta(f_{yy} - f_{xx}) + r\cos 2\theta f_{xy} - f_x \sin\theta + f_y \cos\theta$；

16．$f + xf_x + xf_u \frac{e^{(2u+x)^2}}{e^{(u-2y)^2} - 2e^{(2u+x)^2}}$；17．$2x + 2y - z = 0$；18．$\frac{7}{3}$；

19．$z(x,y) = 4(x-y) - y^2 - x^2$；20．$z(2,-2) = -8$.

“高等数学 A（下）”期中试题 8

1．级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$ 的敛散性为________.

2．级数 $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n} + \cdots$ 的敛散性为________.

3．级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n + (-1)^{n-1}}{n^2}$ 的敛散性为________.

4．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-1)^n}(x+1)^n$ 的收敛域为________.

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n=$________.

6．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}$ 的和函数________.

7．函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 在 $x=1$ 处的幂级数展开式为__________________.

8．设函数 $f(x)$ 的周期为 2π，$f(x)=\mathrm{e}^x\ (0\leqslant x<2\pi)$，它的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(4\pi)=$________.

9．函数 $f(x)=1-x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 的正弦级数为__________________.

10．$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\frac{xy-\sin xy}{y^2(\mathrm{e}^{2x^2\sin y}-1)}=$________.

11．设 $f(x,y)=\cos\frac{(x-1)y\mathrm{e}^{y^2}+xy}{2x+(x-1)^2y^2\mathrm{e}^{y^2}}$，则 $f_y\left(1,\frac{\pi}{3}\right)=$________.

12．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\cos xy-1}{x^3y}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f_y(1,0)=$___________.

13．函数 $u=xy\mathrm{e}^{\frac{x}{z}}$ 在 $(1,1,-1)$ 的全微分为__________________.

14．设 $f(x,y)$，$\varphi(x,y)$ 具有连续偏导数，$f(0,0)=1,\ f_x(0,0)=2,\ f_y(0,0)=3$，$\varphi(1,1)=0$，$\varphi_x(1,1)=1,\ \varphi_y(1,1)=2$，$u(x)=(x+1)\cdot f[x,\varphi(1-x,1+x)]$，则 $u'(0)=$________.

15．设函数 $z=f(x,u,v)$ 有一阶连续偏导数，而 $u=u(x,y),\ \ v=v(x,y)$ 由方程 $u^2-v^2=x+y,\ \ \int_{v-2y}^{u-x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=1$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

16．设 $f(u,v,w)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x-y,x+2y,xy)$，则 $z_{xy}=$________.

17．曲线 $\begin{cases}z=x^2\sin xy\\ x=1\end{cases}$ 上点 $\left(1,\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为________________.

18．函数 $u=xy^2z^3$ 在点 $(1,-1,1)$ 处沿梯度方向的方向导数为___________.

19．设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2,\ f(x,0)=1,\ f_y'(x,0)=x$，则函数 $f(x,y)$ 的表达式为______.

20．已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则点 $(0,0)$ ________.

（A）不是 $f(x,y)$ 的极值点；（B）是 $f(x,y)$ 的极大值点；

（C）是 $f(x,y)$ 的极小值点；（D）无法判定.

“高等数学 A（下）”期中试题 8 参考答案

1．收敛；2．发散；3．条件收敛；4．$(-3,1)$；5．$2\sqrt{e}-1$；

6．$\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & x\in(-1,1)\ x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$；7．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1}$，$x\in(-1,3)$；

8．$\dfrac{1+e^{2\pi}}{2}$；9．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\pi}\sin n\pi x\quad x\in(0,1]$；10．$\dfrac{1}{12}$；11．$-\dfrac{1}{4}$；12．$-\dfrac{1}{2}$；13．$\dfrac{1}{e}dy-\dfrac{1}{e}dz$；

14．6；15．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{2ve^{(u-x)^2}-e^{(v-2y)^2}}{2ve^{(u-x)^2}-2ue^{(v-2y)^2}}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{(2u-1)e^{(u-x)^2}}{2ve^{(u-x)^2}-2ue^{(v-2y)^2}}$；

16．$f_3'-f_{11}''+f_{12}''+(x-y)f_{13}''+(x+2y)f_{23}''+2f_{22}''+xyf_{33}''$；17．$\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-\frac{\pi}{6}}{1}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$；

18．$\sqrt{14}$；19．$f(x,y)=y^2+xy+1$；20．A.

“高等数学 A（下）”期中试题 9

1．若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^n}$，$a>0$ 收敛，则常数 a 满足________.

2．级数 $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{4n}+\cdots$ 的敛散性为________.（绝对收敛、条件收敛或发散）

3．若级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\dfrac{a}{n}-\ln\left(1+\dfrac{b}{n}\right)\right]$ 收敛，则常数 a，b 满足________.

4．级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln^{\alpha}n}$ 当 α ________时绝对收敛；当 α ________时条件收敛.

5．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad (u_n>0, n=1,2,\cdots)$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\,u_{2n-1}$ 是________的.（收敛或发散）

6．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=8$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和为________.

7．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{3^n}$ 的收敛域为________.

8．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-5)^n$ 在 $x=2$ 处收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+3)^{n-1}$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处敛散性为________.（绝对收敛、条件收敛、发散或不能确定）

9．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和为________.

10．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n-1}$ 的和函数 $s(x)=$________________.

11．函数 $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ 的 $x-1$ 的幂级数展开式为________________.

12．设 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ x^2, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\end{cases}$ $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$,则 $s\left(\frac{3\pi}{2}\right)=$ ______.

13．$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy[1-\cos(x^2+y^2)]}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=$________.

14．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy-y}{xy^2}, & xy\neq0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_y(1,0)=$________.

15．设 $z+\ln z-\int_y^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ________________.

16. 设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$ 确定函数 $z=z(x,y)$, 其中 F 具有连续偏导数, 且 $F_2'-F_3'\neq0$, 则 $\mathrm{d}z=$________.

17．设 $z=f(x+xy)+x\cdot g(x,xy)$ ，其中 f 二阶可导，g 具有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

18．曲面 $z=x^2+5xy-2y^2$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程是________，法线方程是________.

19．设函数 $u=2x^2+2y^2+3z^2$，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 $2x^2+2y^2+3z^2-7=0$ 上点 $(1,1,1)$ 处的内法线方向，则方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=$________________.

20．设 $f(t)$ 具有连续的二阶导数，且 $u=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+u=0$，则 $f(t)=$________________.

“高等数学 A（下）”期中试题 9 参考答案

1．$a>1$；2．发散；3．$a=b$；4．>1；$\leqslant 1$；5．收敛；6．14；

7．$[-1,1]$；8．不能确定；9．3；10．$s(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)\mathrm{e}^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$

11．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{n-1},\quad x\in(-1,3)$；12．$-\dfrac{\pi^2}{8}$；13．0；14．$-\dfrac{1}{6}$；

15．$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{z}{(z+1)^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$；16．$\mathrm{d}z=\dfrac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}x+\dfrac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}\mathrm{d}y$；

17．$\dfrac{\partial z}{\partial x}=(y+1)f'+g+xg_1'+xyg_2'$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'+x(y+1)f''+2xg_2'+x^2g_{12}''+x^2yg_{22}''$；

18．$12x-3y-z-3=0$，$\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{-1}$；19．$-2\sqrt{17}$；

20．$f(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$，C_1，C_2 为常数.

四、“高等数学 A（下）”期末试题

“高等数学 A（下）”期末试题 1

一、填空题

1．点 $P(2,3,1)$ 在直线 $\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$ 上的投影点是________.

2．设 $z=x\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$________.

3．曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x^2+y^2-z=0 \end{cases}$上点$P(1,1,2)$处的切线方程是________.

4．函数$u=x^2-xy+y^2$在点$P(1,1)$处的所有方向导数的最小值为________.

5．向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\left(x^2y^2, y\ln(x^2+z), \arctan\dfrac{yz}{x}\right)$在点$P(1,1,1)$的散度$\operatorname{div}(\boldsymbol{A})=$________.

6．设质点在力$\boldsymbol{F}=-x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}$作用下沿圆周$x^2+y^2=R^2$的顺时针方向运动一周，则$\boldsymbol{F}$所作的功$W=$________.

7．函数$f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+5x+6}$在$x=0$点处的幂级数展开式为________.

8．已知$f(x)=x+1$，$x\in[0,1]$，$S(x)$是$f(x)$的周期为1的傅里叶级数的和函数，则$S\left(\dfrac{1}{2}\right)=$________.

9．设Ω为球体$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，则$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}V=$________.

10．幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n}$的收敛域为________.

二、设$u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中$f$，$\varphi$都具有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

三、计算曲面积分$I=\iint\limits_{S}xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$S$是由曲线$\begin{cases} y=\sqrt{1+z^2} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\leqslant z\leqslant 2)$绕$z$轴旋转而成的曲面,其法线向量与$z$轴正向夹角为锐角.

四、设积分$I=\int_C f(xy)[y^2\mathrm{d}x+(1+xy)\mathrm{d}y]=0$，$C$是平面上任意光滑闭曲线，$f(x)$可微，$f(0)=1$. 求$f(x)$和$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f(xy)[y^2\mathrm{d}x+(1+xy)\mathrm{d}y]$的值.

五、在经过点$\left(2,1,\dfrac{1}{3}\right)$的所有平面中，求一个平面$\pi$，使它与三个坐标平面在第一卦限内所围成的立体的体积最小.

六、计算三重积分$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}z\int_0^{1-x-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}y$.

七、求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$的收敛半径、收敛域及和函数，并求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$的值.

八、设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，且 $|f'(x)|\leqslant r<1$，又 $u_{n+1}=f(u_n)$，$n=0,1,2,\cdots,u_0\in[a,b]$，试证：$\sum_{n=0}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$ 收敛.

"高等数学 A（下）"期末试题 1 参考答案

一、1．$(-5,2,4)$；2．$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y$；3．$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}$；

4．$-\sqrt{2}$；5．$5/2+\ln 2$；6．$-\frac{1}{2}\pi R^4$；7．$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)x^{n+2},|x|<2$；8．$\frac{3}{2}$；

9．$\frac{8\pi R^5}{5}$；10．$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

二、解：$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$.

方程 $\varphi(x^2,y,z)=0$ 的两边对 x 求偏导，得

$$\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot\mathrm{e}^y\cdot\cos x+\varphi_3'\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\cdot\varphi_2'}{\varphi_3'}.$$

故
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\cos x\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{2x\varphi_1'+\mathrm{e}^y\cos x\cdot\varphi_2'}{\varphi_3'}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

三、解：旋转曲面方程为 $x^2+y^2-z^2=1$，取曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 5,\\ z=2,\end{cases}$ 法线向量向下，取 $S_2:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 2,\\ z=1,\end{cases}$ 法线向量向上. 设三曲面所围区域为 Ω.

$$I=\iint_S xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S+S_1+S_2} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\iint_{S_1} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_2} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_1=\iint_{S+S_1+S_2} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=-\int_1^2 z^2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_1^2\pi z^2(1+z^2)\mathrm{d}z=-\frac{128}{15}\pi,$$

$$I_2=-\iint\limits_{S_1} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_2} xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{S_1}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_2}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2+5}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

故 $I=I_1-I_2=-\dfrac{128}{15}\pi$.

四、解：$P(x,y)=f(xy)y^2, Q(x,y)=f(xy)(1+xy)$. 依题意有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

即得
$$xf'(xy)y^2+2yf(xy)=yf(xy)+yf'(xy)(1+xy)$$

即
$$f'(xy)=f(xy)\Rightarrow f(xy)=C\mathrm{e}^{xy}.$$

由
$$f(0)=1\Rightarrow C=1\Rightarrow f(xy)=\mathrm{e}^{xy}.$$

故
$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}f(xy)[y^2\mathrm{d}x+(1+xy)\mathrm{d}y]$$

$$=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}y+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1+\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}.$$

五、解：设平面方程为 $\dfrac{X}{x}+\dfrac{Y}{y}+\dfrac{Z}{z}=1$，其中 x,y,z 是平面在三个坐标轴上的截距. 则 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3z}-1=0$，体积为 $V=\dfrac{1}{6}xyz$.

问题化为求 $V=\dfrac{1}{6}xyz$ 在条件 $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3z}-1=0$ 下的最大值.

作函数
$$F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3z}-1\right).$$

解方程组
$$\begin{cases}F'_x=yz-2\lambda\cdot 1/x^2=0,\\ F'_y=zx-\lambda\cdot 1/y^2=0,\\ F'_z=xy-\lambda\cdot 1/3z^2=0,\\ F'_\lambda=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3z}-1=0,\end{cases}$$

得唯一的驻点 $(6,3,1)$.

由问题的实际意义知，$x=6,y=3,z=1$ 时，平面与三个坐标平面在第一卦限内所围立体的体积最小，故所求平面的方程为

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+z=1.$$

六、解： $$I=\iiint\limits_{\Omega}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 为

$$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1-x-z,\\0\leqslant z\leqslant 1-x,\\0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

为了交换积分次序，将 Ω 表示为

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1-y-z,\\0\leqslant z\leqslant 1-y,\\0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

故 $$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(1-y)\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)[1-\mathrm{e}^{-(1-y)^2}]\mathrm{d}y=\frac{1}{4\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

七、解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{2n+3}\Big/\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right|=x^2$，令 $x^2<1$，所以 $|x|<1$，于是收敛半径为 $R=1$. 当 $x=\pm1$，得级数 $\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$，均收敛，故收敛域为 $[-1,1]$.

令该幂级数的和函数为 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1)$. 则

$$\begin{aligned}S(x)&=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x,\ x\in(-1,1).\end{aligned}$$

因为 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，于是所求和函数为

$$S(x)=\arctan x,\ x\in[-1,1].$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=S(1)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

八、证明：因为

$$|u_2-u_1|=|f(u_1)-f(u_0)|=|f'(\xi_1)|\cdot|u_1-u_0|\leqslant r|u_1-u_0|,$$

$$|u_3-u_2|=|f(u_2)-f(u_1)|=|f'(\xi_2)|\cdot|u_2-u_1|\leqslant r|u_2-u_1|\leqslant r^2|u_1-u_0|$$

一般地有

$$|u_{n+1}-u_n|=|f(u_n)-f(u_{n-1})|=|f'(\xi_n)|\cdot|u_n-u_{n-1}|\leqslant r|u_n-u_{n-1}|\leqslant r|u_n-u_{n-1}|\leqslant\cdots\leqslant r^n|u_1-u_0|$$

因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n|u_1-u_0|$ 收敛，由比较判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_{n+1}-u_n|$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 2

一、填空题

1．过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$ 且垂直于平面 $3x+2y-z=5$ 的平面方程为________.

2．设 $z=z(x,y)$ 是方程 $xyz=\arctan(x+y+z)$ 在 $(0,1,-1)$ 点确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1,-1)}=$ ________.

3．函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在点 $P(2,1,0)$ 处沿曲线 $x=2t,y=t^3$，$z=\dfrac{6}{\pi}\sin\pi t$ 在该点的切线方向的方向导数为________.

4．函数 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $P(1,1)$ 处的所有方向导数的最大值为________.

5．向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(xy^2,ye^z,x\ln(1+z^2))$ 在点 $P(1,1,0)$ 的旋度 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})=$ ________.

6．设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=0$，$y=x^2$，$x=1$ 所围成，则 $f(x,y)=$ ________.

7．函数 $f(x)=(x-1)2^x$ 在 $x=1$ 点处的幂级数展开式为____________________.

8．将 $f(x)=x^2,x\in[0,\pi]$ 展开成傅里叶级数为 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$，则 $a_2=$ ________.

9．设 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_\Omega(xy^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

10．设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 2，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}a_n(x+1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

二、设 $z=f(2x-y,y\sin x)+g(x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 有二阶连续导数. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、求曲面积分

$$I=\iint_S (x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧.

四、设 $f(x)$ 有连续的导数，$f(0)=-1$，且积分

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}[\tan x-f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，求 $f(x)$ 和此积分的值.

五、在半径为 R 的上半球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\,(0\leqslant z\leqslant R)$ 内嵌入有最大体积的母线平行于 z 的直圆柱，求这圆柱的半径和高.

六、求曲面 $z=x^2+y^2+1$ 上点 $M(1,-1,3)$ 处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的空间区域的体积 V.

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛半径，收敛域及和函数，并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1}{2^n}$ 的值.

八、设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，证明对任意的常数 $\alpha>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 2 参考答案

一、1．$x-8y-13z+9=0$；2．-1；3．2；4．$\sqrt{2}$；5．$-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k}$；

6．$xy+\dfrac{1}{8}$；7．$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2(\ln 2)^n}{n!}(x-1)^{n+1},-\infty<x<+\infty$；8．1；9．$\dfrac{\pi}{8}$；10．$(-3,1)$.

二、解：令 $u=2x-y,v=y\sin x,\omega=x+y$，则

$$z=f(u,v)+g(\omega),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\omega}\frac{\partial \omega}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\omega},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\omega}\right)\\&=2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+y\cos x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\omega^2}\end{aligned}$$

$$=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}y\sin 2x+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}\omega^2}.$$

三、解：补上曲面 $S_1: x^2+y^2\leqslant 1, z=0$，取上侧. 则

$$I=\iint\limits_{S+S_1}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由高斯公式得

$$\iint\limits_{S+S_1}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=-\frac{6}{5}\pi$$

$$\iint\limits_{S_1}(x^3+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{S_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

原积分 $=-\dfrac{6}{5}\pi-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{29\pi}{20}$.

四、解：在此积分式中，

$$P(x,y)=[\tan x-f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}, Q(x,y)=f(x).$$

由于积分与路径无关，有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

得
$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{[\tan x-f(x)]\frac{y}{\cos^2 x}\right\}=\frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

即
$$f'(x)+f(x)\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\tan x}{\cos^2 x},$$

且有 $f(0)=-1$. 解此微分方程得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}} \left(\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}} \mathrm{d}x + C \right) = \tan x - 1 + C\mathrm{e}^{-\tan x}.$$

由 $f(0) = -1 \Rightarrow C = 0$. 故 $f(x) = \tan x - 1$.

于是
$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} [\tan x - f(x)] \frac{y}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + f(x)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{(0,0)}^{(1,1)} \frac{y}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + (\tan x - 1)\mathrm{d}y = \int_0^1 (\tan 1 - 1)\mathrm{d}y = \tan 1 - 1.$$

五、解：设圆柱与半球面的交线上第一卦限内的点的坐标为(x, y, z)，则此圆柱的体积为
$$V = \pi(x^2 + y^2)z, \quad x > 0, y > 0, 0 < z < R.$$

问题化为在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 下，求V 的最大值.

作函数
$$F(x, y, z, \lambda) = \pi(x^2 + y^2)z + \lambda(R^2 - x^2 - y^2 - z^2).$$

解方程组
$$\begin{cases} 2\pi xz - 2x\lambda = 0, \\ 2\pi yz - 2y\lambda = 0, \\ \pi(x^2 + y^2) - 2z\lambda = 0, \\ R^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \end{cases}$$

得唯一的一组解 $x = y = z = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$.

由问题的实际意义可知，问题只有最大值而无最小值，因此当此圆柱的高为 $z = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$，半径为$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} R$ 时，圆柱的体积最大.

六、解：曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 上点 $M(1, -1, 3)$ 处的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n} = \{z'_x, z'_y, -1\}|_M = \{2, -2, -1\}$，切平面方程为

$$2(x - 1) - 2(y + 1) - (z - 3) = 0,$$

即 $z = 2x - 2y - 1$.

此切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 的交线 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2x - 2y - 1 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影为 $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ 它所围区域设为D. 于是所求体积为

$$V=\iint_D[(2x-2y-1)-(x^2-y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D[1-(x-1)^2-(y+1)^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x-1=r\cos\theta,\ y+1=r\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1$．则

$$V=\iint_D(1-r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r-r^3)\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

七、解：易求出收敛半径 $R=1$，收敛域为 $(-1,1)$.

令 $$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}2nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x\right)'+\frac{1}{1-x}=2x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'+\frac{1}{1-x}=2x\left(\frac{x}{1-x}\right)'+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}\quad(-1<x<1).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1-1/2}{(1+1/2)^2}=\frac{2}{9}.$$

八、证明：令 $\tan x=t$，则 $x=\arctan t, \mathrm{d}x=\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$，得

$$0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}.$$

所以 $0<\dfrac{a_n}{n^\alpha}<\dfrac{1}{(n+1)n^\alpha}<\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$．由于当 $\alpha>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛，根据比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 3

一、填空题

1．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{2x^2y^2}=$________.

2．设函数 $f(x,y,z)=x^yy^z$，则 $\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}=$________________.

3．曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=10$ 的切平面方程为______________.

4．函数 $u=2xy+z-\mathrm{e}^z-3$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,2,-1)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,2,0)}=$________.

5．设 $F(x,y,t)=0$ 确定函数 $t=t(x,y)$，且 $y=f(x,t)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________.

6．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^n}{n}$ 的收敛域是________.

7．设 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\leqslant 0,\\ x+2x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$ 是周期为 2π 的周期函数，则其傅里叶级数在点 $x=3\pi$ 处收敛于________.

8．设 $S:x^2+y^2+z^2=4$，则 $\oiint\limits_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S=$________.

9．已知向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+yz^2)\boldsymbol{i}+(y+zx^2)\boldsymbol{j}+(z+x^2y)\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})|_{(2,1,1)}=$________.

10．设 $f(u)$ 是关于 u 的奇函数，D 是由 $x=1,y=1,y=-x^3$ 所围成的平面区域，$\iint\limits_D[x^3+f(xy)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

二、求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$ 的收敛域.

三、设 $z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$ 分成两部分，求这两部分的体积之比.

五、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续一阶导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向光滑曲线，其起点为 $(2,3)$，终点为 $(3,2)$．记

$$I=\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y.$$

（1）证明曲线积分 I 与路径无关；（2）求出 I 的值.

六、求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在条件 $(x-y)^2-z^2=1$ 下的极值.

七、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{e}^z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1,z=2$ 所围成的立体表面外侧.

八、设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是正项级数．证明：

（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，且 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{b_{n+1}}{b_n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛；

（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，且 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \frac{b_{n+1}}{b_n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散.

“高等数学 A（下）”期末试题 3 参考答案

一、1．1；2．$x^y y^z\left(\ln x + \ln y + \frac{z}{y}\right)$；3．$x+4y+6z=\pm 21$；

4．$\frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$；5．$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{F_t' \cdot f_x' - F_x' \cdot f_t'}{F_t' + F_y' \cdot f_t'}$；6．$(-2,0]$；

7．π^2；8．$\frac{128}{3}\pi$；9．$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})\big|_{(2,1,1)} = -2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$；10．$\frac{2}{7}$.

二、解：令 $t = \frac{1-x}{1+x}$，再先求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^2}{n} t^n$ 的收敛域.

由于
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1} \Big/ \frac{3^n+(-2)^n}{n}\right) = 3,$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^2}{n} t^n$ 的收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

当 $t = -\frac{1}{3}$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^2}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$，收敛；

当 $t = \frac{1}{3}$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^2}{n} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$，发散.

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，由 $-\frac{1}{3} \leqslant t = \frac{1-x}{1+x} < \frac{1}{3}$ 可得 $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$，级数的收敛域为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

三、解：
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} g'\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3} g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{x}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x^2}g''\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以
$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0.$$

四、解：球面方程为 $x^2+y^2+(z-2a)^2=(2a)^2$，其体积为 $\frac{32}{3}\pi a^3$.

两曲面交线 $\begin{cases} x^2+y^2+az=4a^2 \\ x^2+y^2+z^2=4az \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases} x^2+y^2=3a^2 \\ z=0 \end{cases}$，球面的下部与曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 之间的体积为 V_1. 则

$$V_1=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \quad \text{（用柱面坐标）}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}r\mathrm{d}r\int_{2a-\sqrt{4a^2-r^2}}^{4a-\frac{r^2}{a}}\mathrm{d}z=\frac{37}{6}\pi a^3,$$

球面上部与曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 之间的体积为 V_2，有

$$V_2=V-V_1=\frac{32}{3}\pi a^3-\frac{37}{6}\pi a^3=\frac{27}{6}\pi a^3,$$

故 $V_1:V_2=37:27$.

五、解：（1）所给区域为单连通区域，只需验证 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

其中
$$P=[1+y^2f(xy)]/y,\ Q=x[y^2f(xy)-1]/y.$$

因为
$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

故在上半平面内有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，因而积分与路径无关.

（2）
$$I=\int_{(2,3)}^{(3,2)}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\int_2^3\frac{1+9f(3x)}{3}\mathrm{d}x+\int_3^2\frac{3[y^2f(3y)-1]}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_2^3\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\int_2^3 3f(3x)\,\mathrm{d}x+\int_3^2 3f(3y)\,\mathrm{d}y-3\int_3^2\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\frac{5}{6}.$$

六、解：令
$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-1].$$

解方程组
$$\begin{cases} F'_x = 2x + 2\lambda(x-y) = 0, \\ F'_y = 2y - 2\lambda(x-y) = 0, \\ F'_z = 2z - 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = (x-y)^2 - z^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

得驻点 $P_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right), P_2\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

由于
$$u(P_1) = u\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, u(P_2) = u\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

根据问题的几何意义知，所求极限即为最小值，等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

七、解：由题设知所给积分满足高斯公式条件，利用高斯公式得

$$I = \iint_\Sigma \frac{e^z dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdydz$$

$$= \iiint_\Omega \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdydz \quad \text{（用柱面坐标计算）}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^2 \frac{e^z}{r} dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r dr \int_r^2 \frac{e^z}{r} dz$$

$$= (e^2 - e)\cdot 2\pi + e \cdot 2\pi = 2\pi e^2.$$

八、证明：（1）由于 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ，于是得

$$|a_n| \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}|a_{n-1}| \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}|a_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}|a_1| = \frac{|a_1|}{b_1}b_n,$$

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则由比较判别法知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

（2）根据由（1）的证明，用反证法即得结果.

“高等数学 A（下）”期末试题 4

一、填空题

1．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to 2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+y}} =$ ________.

2．设 $z=\varphi(x^2+y)+x^y$，其中 φ 具有二阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________________.

3．曲面 $z=\arctan(xy)$ 在点 $P\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的法线方程为________________.

4．函数 $f(x,y,z)=z-e^z+2xy+1$ 在点 $(2,1,0)$ 处的方向导数的最大值为________.

5．设 $\begin{cases} x=-u^2+v+z \\ y=u+vz \end{cases}$ 确定 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$________.

6．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{9^n}$ 的收敛域是________.

7．设 $f(x)=\begin{cases} -x, & -1<x\leqslant 0, \\ 1-x^2, & 0<x<1, \end{cases}$ 是周期为 2 的周期函数，则其傅里叶级数在点 $x=4$ 处收敛于________.

8．设 Σ：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧，则 $\displaystyle\oiint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=$________.

9．已知 $\boldsymbol{A}=y\boldsymbol{i}+2z^2\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k},\boldsymbol{B}=x^2\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=$________.

10．设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L(2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=$_______.

二、将函数 $f(x)=\dfrac{12-5x}{6-5x-x^2}$ 在点 $x_0=2$ 处展开成泰勒级数，并指出其收敛域.

三、设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

四、设 V 是由曲面 Σ_1：$x^2+y^2=az$ 和 Σ_2：$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$（$a>0$）所围成的空间封闭图形. 求（1）V 的体积；（2）V 的表面积.

五、确定参数 λ 的值，使得在不经过直线 $y=0$ 的区域上，曲线积分 $I=\displaystyle\int_L\frac{x(x^2+y^2)^{\lambda}}{y}\mathrm{d}x-\frac{x^2(x^2+y^2)^{\lambda}}{y^2}\mathrm{d}y$ 与路径无关，并求当 L 为从 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 时 I 的值.

六、求函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$、x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值和最小值.

七、计算 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所截得部分的外侧.

八、已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'=x+y$，且 $y(0)=1$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\right]$ 绝对收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 4 参考答案

一、1．e^2；2．$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\varphi''(x^2+y)+(1+y\ln x)x^{y-1}$；

3．$\frac{x-1}{1/2}=\frac{y-1}{1/2}=\frac{z-\pi/4}{-1}$ 或 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-\pi/4}{-2}$；4．$2\sqrt{5}$；

5．$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-z}{2uz+1}$；6．$(-2,4)$；7．$\frac{1}{2}$；8．$4\pi$；9．$x^3-y^2-4x^2z-z$；

10．-18π.

二、解：

$$f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{6}{6+x}$$

$$=-\frac{1}{1+(x-2)}+\frac{6}{8+(x-2)}=-\frac{1}{1+(x-2)}+\frac{1}{8}\frac{6}{1+\frac{x-2}{8}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n+\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{8^n}(x-2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[-1+\frac{3}{4}\frac{1}{8^n}\right](x-2)^n.$$

收敛域为 $|x-2|<1$ 或 $x\in(1,3)$.

三、解：

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^4 f_1'+x^2 f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left[xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right]+x^2\left[xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right]=x^5 f_{12}''+2x^3 f_{12}''+xf_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3 f_1'+x^4\left[yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}''\right]+2xf_2'+x^2\left[yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}''\right]$$

$$=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''.$$

四、解：两曲面的交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0,\end{cases}$

（1）体积 $V=\iiint\limits_{V}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^a \mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant az}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^{2a}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant(2a-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{5}{6}\pi a^3$.

（2）由抛物面方程得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{a},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{a},$$

故 $$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由圆锥面方程得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

故 $$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是图形的表面积为

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4r^2}a^2r\mathrm{d}r+\sqrt{2}\pi a^2=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1),$$

五、解： $$P(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)^\lambda}{y},\ Q(x,y)-\frac{x^2(x^2+y^2)^\lambda}{y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}(2\lambda y^2-x^2-y^2),$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{2x}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda-1}(\lambda x^2+x^2+y^2).$$

要使曲线积分 I 与路径无关，必有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，即得

$$(2\lambda-1)y^2-x^2=-2(\lambda+1)x^2-2y^2,$$

即 $(2\lambda+1)y^2+(2\lambda+1)x^2=0$.

因 $y\neq0$，所以 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

当 L 为从 $A(1,1)$ 到 $B(0,2)$ 时，选择折线积分：

$$I=\int_1^0 x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int_1^2 0\mathrm{d}x=1-\sqrt{2}.$$

六、解：（1）求区域 D 的驻点

令 $$\begin{cases} f_x'=2xy(4-x-y)-x^2y=0,\\ f_y'=x^2(4-x-y)-x^2y=0,\end{cases}$$

得驻点 $(0,y),0\leqslant y\leqslant 6$ 和 $(4,0),(2,1)$，只有 $(2,1)$ 在 D 内部.

（2） $f(x,y)$ 在边界 $x=0,(0\leqslant y\leqslant 6)$ 及 $y=0\quad(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上取值恒为零.

在边界 $x+y=6\,(0\leqslant x\leqslant 6)$ 上有 $y=6-x$，代入 $f(x,y)$，令

$$h(x)=f(x,y)=f(x,6-x)=-2x^2(6-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 6,$$

求得 $h(x)$ 的驻点为 $x_1=0,\quad x_2=4$.

由于 $f(2,1)=4, f(4,2)=h(4)=-64$，所以最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$.

七、解：补上平面 $z=1$ 上的对应部分 Σ_1 的上侧.

令曲面 $S=\Sigma+\Sigma_1$ 所构成的空间区域为 Ω. 利用高斯公式

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于 $$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}V=0,$$

而 $$\iint\limits_{\Sigma_1} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4},$$

所以 $I=-\dfrac{\pi}{4}$.

八、证明：因为 $y'=x+y$，所以 $y''=1+y'$，由 $y(0)=1$， $y'(0)=1$， $y''(0)=2$.

根据泰勒公式，有

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2!}y''(0)x^2+o(x^2),$$

于是 $$y\left(\frac{1}{n}\right)=y(0)+y'(0)\frac{1}{n}+\frac{1}{2!}y''(0)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

所以当 $n\to\infty$ 时，$\left|y\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n}\right|\sim\dfrac{1}{n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\dfrac{1}{n}\right)-1-\dfrac{1}{n}\right]$ 绝对收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 5

一、填空题

1．设 $f(x-y,\ln x)=\left(1-\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{e^x}{e^y\ln(x^x)}$，则 $f(x,y)=$________.

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2+x^4}=$________.

3．函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $(-1,1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数等于________.

4．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n x\right]^n$ 的收敛区间为________.

5．已知 $\boldsymbol{A}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$，则 $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})=$________.

6．设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则 $\oint_L(2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是________.

二、计算题

1．设 $z=x^3f(xy,x+y^2)$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2．求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

3．计算 $\iint\limits_D x\,dxdy$，其中 $D:x^2+y^2\geqslant2,x^2+y^2\leqslant2x$.

4．计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2+z^2-z=0$ 所围成的区域.

5．计算积分 $I=\int_C x^2ds$，其中 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\quad(a>0),\\x+y+z=0.\end{cases}$

三、综合与证明题

1．设 S 是曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1},\\x=0\end{cases}$ $(1\leqslant y\leqslant3)$ 绕 y 轴旋转一周所成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\pi/2$，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy.$$

2．在曲面 $z=2-x^2-y^2$ 位于第一卦限的部分上求一点，使该点的切平面与三个坐标平面

围成的四面体的体积最小.

3．设光滑曲面 $z=f(x,y)$ 与平行于 z 轴的直线只有一个交点，其在 xOy 平面上的投影为有界区域 D，试证此曲面的面积为

$$S=\iint\limits_D \sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

其中 (r,θ) 为点 (x,y) 的极坐标.

4．已知 $a_n>0, a_{n+1}\leqslant a_n (n=1,2,3,\cdots)$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 5 参考答案

一、1． $f(x,y)=\dfrac{x}{y}\mathrm{e}^{x-2y}$；2．0；3． $-14/3$；4． $(-\mathrm{e},\mathrm{e})$；5． $\{2,2,2\}$；6． -18π.

二、1．解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2 f+x^3[yf_1+f_2]=3x^2 f+x^3yf_1+x^3 f_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3[xf_1+2yf_2]=x^4 f_1+2x^3yf_2,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=x^4[xf_{11}+2yf_{12}]+2x^3 f_2+2x^3y[xf_{21}+2yf_{22}]\\ &=x^5 f_{11}+2x^4yf_{12}+2x^3 f_2+2x^4yf_{21}+4x^3y^2 f_{22}\\ &=x^5 f_{11}+4x^4yf_{12}+4x^3y^2 f_{22}+2x^3 f_2.\end{aligned}$$

2．解：在点 $M(1,1,1)$ 处，方程组

$$\begin{cases}2x+2yy'+2zz'-3=0,\\ 2-3y'+5z'=0\end{cases}$$

化简为 $\begin{cases}2y'+2z'=1\\ 3y'-5z'=2\end{cases}$，解之得 $y'=\dfrac{9}{16}, z'=-\dfrac{1}{16}$.

于是曲线上点 $M(1,1,1)$ 处切线向量为 $\boldsymbol{v}=\left(1,\dfrac{9}{16},-\dfrac{1}{16}\right)\parallel(16,9,-1)$.

切线方程为

$$\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0.$$

3．解：由$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$解得两曲线的交点为$(1,-1),(1,1)$，所以

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

4．解：令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$.
则曲面$x^2+y^2+z^2-z=0$化成$r=\cos\varphi$，且

$$\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\cos\varphi.$$

于是
$$\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi} r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}.$$

5．解：由对称性得
$$I=\int_C x^2\mathrm{d}s=\int_C y^2\mathrm{d}s=\int_C z^2\mathrm{d}s,$$

所以
$$I=\frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\int_C a^2\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

三、1．解：曲面的方程为$S: y=x^2+y^2+1$.

补上圆域$S_1:\begin{cases} x^2+z^2\leqslant 2, \\ y=3, \end{cases}$其法向量与$y$轴正向一致.

于是
$$I=\iint\limits_{S+S_1} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\iint\limits_{S_1} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中
$$I_1=\iint\limits_{S+S_1} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_\Omega (8y+1-4y-4y)\mathrm{d}V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\int_{1+r^2}^{3}\mathrm{d}y=2\pi,$$
$$I_2=\iint\limits_{S_1} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D_{zx}} -16\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-32\pi,$$

故$I=34\pi$.

2．解：设$P(x,y,z)$为曲面位于第一卦限部分上的任一点，则曲面在该点处的法线向量为

$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,1\}$，切平面方程为

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+(Z-z)=0,$$

化成截距式为
$$\frac{X}{(4-z)/2x}+\frac{Y}{(4-z)/2y}+\frac{Z}{4-z}=1,$$

所以四面体的体积为
$$V=V(x,y,z)=\frac{(4-z)^3}{24xy}.$$

设 $f(x,y,z)=\ln(24V)=3\ln(4-z)-\ln x-\ln y$，则所讨论的问题等价于求 $f(x,y,z)$ 在条件 $z=2-x^2-y^2$ 下的最小值问题，令

$$F(x,y,z,\lambda)=3\ln(4-z)-\ln x-\ln y+\lambda(x^2+y^2+z-2),$$

解方程组
$$\begin{cases}F_x=-1/x+2\lambda x=0,\\F_y=-1/y+2\lambda y=0,\\F_z=-3/(4-z)+\lambda=0,\\F_\lambda=x^2+y^2+z-2=0,\end{cases}$$

得 $x=y=\sqrt{2}/2,z=1$，因为驻点是唯一的，由题意可知点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ 即为所求.

3．证明：由 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,\frac{\partial z}{\partial\theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta,$$

故
$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

于是
$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\iint_D\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

4．证明：因 $a_n>0,a_{n+1}\leqslant a_n(n=1,2,3,\cdots)$，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，记其值为 a.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，根据莱布尼茨判别法知 $a>0$.

存在 $N>0$，当 $n \geqslant N$ 时，有 $a_n > \frac{a}{2} > 0$，故当 $n \geqslant N$ 时，有 $\frac{1}{(1+a_n)^n} < \frac{1}{(1+a/2)^n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a/2)^n}$ 收敛.

所以根据比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+a_n)^n}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 6

一、填空题

1．设 $f(x,y)=x^2+y^2$，$\varphi(x,y)=x^2-y^2$，则 $\varphi[f(x,y),\varphi(x,y)]=$________.

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^3}{x^2+2xy+2y^2}=$________.

3．函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}u|_M=$________.

4．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+2^n}{n3^n}\sqrt{|x|^n}$ 的收敛域为________.

5．已知 $\boldsymbol{A}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=$________.

6．设积分区域为 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$，则 $\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

二、计算题

1．设 $z=x^3 f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$，$f(u,v)$ 具有二阶连续导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

2．求球面 $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{4}$ 与椭球面 $3x^2+(y-1)^2+z^2=\frac{17}{4}$ 交线上对应于 $x=1$ 点处的切线方程和法平面方程.

3．计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以 $O(0,0),A(1,1),B(0,1)$ 为顶点的三角形域.

4．设 $\varOmega$ 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 及曲面 $x^2+y^2=z^2$ 围成的满足条件 $x^2+y^2 \leqslant z^2$ 的空间区域，求 $\varOmega$ 的体积.

5．计算积分 $I=\iint\limits_{\varSigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 $\varSigma$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围立体的整个外

表面.

三、综合与证明题

1．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

2．在曲面 $2x^2+2y^2+z^2=1$ 上求一点，使 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\boldsymbol{l}=\{1,-1,0\}$ 的方向导数最大.

3．设 C 是圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，$f(x)$ 是连续正值函数，证明 $\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\dfrac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi$.

4．设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，证明对任意常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 6 参考答案

一、1．$4x^2y^2$；2．0；3．$\dfrac{2}{9}\{1,2,-2\}$；4．$(-9/4,9/4)$；5．$4y\boldsymbol{k}$；6．$\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

二、1．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3\left[yf_1-\dfrac{y}{x^2}f_2\right]=3x^2f+x^3yf_1-xyf_2$，

因为 $f(u,v)$ 具有二阶连续导数，所以 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，即

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=3x^2\left[xf_1+\frac{1}{x}f_2\right]+x^3f_1+x^3y\left[xf_{11}+\frac{1}{x}f_{12}\right]-xf_2-xy\left[xf_{21}+\frac{1}{x}f_{22}\right]\\&=3x^3f_1+3xf_2+x^3f_1+x^4yf_{11}+x^2yf_{12}-xf_2-x^2yf_{21}-yf_{22}\\&=4x^3f_1+2xf_2+x^4yf_{11}-yf_{22}.\end{aligned}$$

2．解：曲线上对应于 $x=1$ 的坐标为 $(1,1/2,1)$ 和 $(1,1/2,-1)$.

设曲线的参数方程式为 $x=x,y=y(x),z=z(x)$，则曲线上任一点的切向量为 $\boldsymbol{v}=\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$.

解方程组 $\begin{cases}2x-2yy'+2zz'=0,\\6x+2(y-1)y'+2zz'=0,\end{cases}$ 得 $y'=2x,z'=(-2xy-x)/z$.

在点 $(1,1/2,1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1/2}{2}=\frac{z+1}{2};$$

法平面方程为 $x+2y-2z=0$；

在点 $(1,1/2,-1)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1/2}{2}=\frac{z-1}{-2};$$

法平面方程为 $x+2y+2z=0$.

3．解：选择先对 x，后对 y 的积分次序积分.这时积分区域表示为 $D:0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y$，所以

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}x\Big|_0^y\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

4．解：利用柱面坐标：$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$．则

$$\Omega:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2}.$$

于是所求体积为

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^a r\left(a+\sqrt{a^2-r^2}-r\right)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{2}\right]\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

5．解：令 $\Sigma_1:z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上对应部分，$\Sigma_2:z=1$ 上对应部分．则 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，且 Σ_1，Σ_2 在 xOy 平面上投影区域均为 $D:x^2+y^2\leqslant 1$.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_D(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2)\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot\sqrt{2}r\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\iint\limits_D(x^2+y^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi.$$

所以
$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)\pi .$$

三、1．解：补上一块有向曲面 Σ_1: $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,\\ z=0,\end{cases}$ 其法向量与 z 轴正向相反，设 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域为 Ω， D 为 $z=0$ 上的平面区域 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

于是得
$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{a}\left[\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$
$$=\frac{1}{a}\left[-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}V+\iint\limits_{D}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=\frac{1}{a}\left[-2\pi a^4-2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}V+\pi a^4\right]$$
$$=\frac{1}{a}\left[-\pi a^4-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{0}z\mathrm{d}z\right]=-\frac{\pi}{2}a^3 .$$

2．解：$\boldsymbol{l}=\{1,-1,0\}$ 方向的方向余弦为
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{2}},\quad \cos\gamma=0 .$$

所以
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=\sqrt{2}(x-y).$$

构造拉格朗日函数
$$F(x,y,z,\lambda)=\sqrt{2}(x-y)+\lambda(2x^2+2y^2+z^2-1),$$

则由
$$\begin{cases}F_x=\sqrt{2}+4\lambda x=0,\\ F_y=-\sqrt{2}+4\lambda y=0,\\ F_z=2\lambda z=0,\\ F_\lambda=2x^2+2y^2+z^2-1=0,\end{cases}$$

解得可能取极值的点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$及$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$.

因为要求的最大值一定存在,比较$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)}=\sqrt{2},\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\sqrt{2}$ 知,所求点为$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

3．证明：由格林公式得

$$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1$.

因为

$$\iint_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(x-1)^2}}f(x)\mathrm{d}y=2\int_0^2 f(x)\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$\iint_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1+\sqrt{1-(y-1)^2}}f(y)\mathrm{d}x=2\int_0^2 f(y)\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y,$$

所以

$$\iint_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$\oint_C xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant 2\iint_D\sqrt{f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

4．证明：令 $\tan x=t$，得

$$0<a_n<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n},$$

所以 $0<\dfrac{a_n}{n^\lambda}<\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$.

由于当 $\lambda>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 7

一、填空题

1．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin[x^2(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}=$________.

2．设 $z=\int_{e^{x^2}}^{y^2}\sin t\,\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}z=$________.

3．函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 方向上的方向导数等于________.

4．已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+x^2}}$的收敛域为________.

5．已知$\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+(y+2)\boldsymbol{j}+yz^2\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})=$________.

6．设函数$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-2x, & 1<x<2, \end{cases}$且$S(x)$是$f(x)$的以4为周期的余弦级数．则$S(-5)=$________.

二、计算题

1．设$u=f(x,y,z), y=\varphi(x,t), t=\psi(x,z)$，其中$f,\varphi,\psi$具有一阶连续偏导数，求$\mathrm{d}u$.

2．求$x^2+y^2=2z$的切平面，使之过曲线$\varGamma:\begin{cases} 3x^2+y^2+z^2=5 \\ 2x^5+y^2-4z=7 \end{cases}$在点$M(1,-1,-1)$的切线.

3．计算$I=\iint\limits_D \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D:1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$.

4．计算$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中积分区域是$\Omega: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$z\geqslant\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$.

5．设$u(x,y)$具有连续的一阶偏导数且$u(0,0)=u(\pi,0)$，L为从点$A(\pi,0)$沿曲线$y=\sin x$到点$O(0,0)$的有向曲线弧，求曲线积分

$$I=\int_L [u_x'(x,y)+y+x\sin x]\mathrm{d}x+[u_y'(x,y)+\mathrm{e}^{y^2}-x]\mathrm{d}y.$$

三、综合与证明题

1．设$f(u)$有一阶连续导数，计算曲面积分

$$\oiint\limits_S \left[\frac{x}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)+x^3\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^3+y\left(1-\frac{1}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f\left(\frac{x}{z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中S为$z=6+2x^2+y^2$与$z=9-x^2-2y^2$所围立体的外侧.

2．在旋转抛物面$S: z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$上求一点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，使之与平面$\pi: 2x+2y+z+6=0$的距离最近，并求出最短距离.

3．已知$P(x,y)=\dfrac{axy^2}{(x^2+y^2)^2}, Q(x,y)=\dfrac{-4x^{\lambda}y}{(x^2+y^2)^2}$，问$a,\lambda$取何值时，积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$在右半平面$x>0$内与路径无关，并在此时求函数$u(x,y)$，使$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

4．设$f'(x)$在区间$[0,1]$上连续，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$绝对收敛.

"高等数学 A（下）"期末试题 7 参考答案

一、1．0；2．$-2x\mathrm{e}^{x^2}\sin\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+2y\sin y^2\mathrm{d}y$；3．5；4．$(-\infty,+\infty)$；5．$(6x,2z,2y)$；6．$\dfrac{1}{2}$.

二、1．解：由于 $y=\varphi(x,t),t=\psi(x,z)$所以$y=\varphi(x,\psi(x,z))$，从而

$$u=f(x,\varphi(x,\psi(x,z)),z),$$

于是u是x,z的函数.

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_x{}'+f_y{}'(\varphi_x'+\varphi_t'\psi_x{}')=f_x{}'+f_y{}'\varphi_x'+f_y{}'\varphi_t'\psi_x{}',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_z{}'+f_y{}'(\varphi_t'\psi_z{}')=f_z{}'+f_y{}'\varphi_t'\psi_z{}',$$

所以
$$\mathrm{d}u=(f_x{}'+f_y{}'\varphi_x'+f_y{}'\varphi_t'\psi_x{}')\mathrm{d}x+(f_z{}'+f_y{}'\varphi_t'\psi_z{}')\mathrm{d}z.$$

2．解：曲线方程两边关于x求导得$\begin{cases}6x+2yy'+2zz'=0,\\10x^4+2yy'-4z'=0.\end{cases}$

将$M(1,-1,-1)$的坐标代入得$\begin{cases}y'+z'=3,\\y'+2z'=5.\end{cases}$所以$y'=1,z'=2.$

曲线的切向量为$\boldsymbol{s}=(1,1,2).$

设曲面上切点为$P(x_0,y_0,z_0)$，则切点处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(2x_0,2y_0,-2)\,/\!/\,(x_0,y_0,1),$$

由于曲面的切平面过曲线的切线，可知

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0\Rightarrow x_0+y_0-2=0. \tag{1}$$

由$\overline{MP}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow x_0(x_0-1)+y_0(y_0+1)-(z_0+1)=0$，即

$$x_0^2+y_0^2-x_0+y_0-z_0=1. \tag{2}$$

由于切点在曲面上，有

$$x_0^2+y_0^2=2z_0. \tag{3}$$

由式（1），（2），（3）解得切点为$(1,1,1)$和$(3,-1,5)$.

对应的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(1,1,-1),\quad \boldsymbol{n}_2=(3,-1,-1).$

切平面方程为$x+y-z-1=0$和$3x-y-z-5=0.$

3．解：由极坐标$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$得$D:\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\\1\leqslant r\leqslant\sqrt{2}.\end{cases}$

于是
$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\frac{r\mathrm{d}r}{r\cdot\sqrt{4-r^2}}=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\frac{r\mathrm{d}r}{r\cdot\sqrt{4-r^2}}$$
$$=2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}(r/2)}{\sqrt{1-(r/2)^2}}=2\pi\arcsin\frac{r}{2}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{6}\pi^2.$$

4．解：由球面坐标 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$ 得 $\Omega:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{6}, 0\leqslant r\leqslant 1$.于是
$$\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cdot r\cdot r^2\mathrm{d}r=2\pi\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{\pi}{20}.$$

5．解：
$$I=\int_L[u_x'(x,y)+y+x\sin x]\mathrm{d}x+[u_y'(x,y)+\mathrm{e}^{y^2}-x]\mathrm{d}y$$
$$=\int_L u_x'(x,y)\mathrm{d}x+u_y'(x,y)\mathrm{d}y+\int_L(y+x\sin x)\mathrm{d}x+(+\mathrm{e}^{y^2}-x)\mathrm{d}y$$
$$=u(x,y)\Big|_{(\pi,0)}^{(0,0)}+\int_L(y+x\sin x)\mathrm{d}x+(+\mathrm{e}^{y^2}-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_L(y+x\sin x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{y^2}-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{L+\overline{OA}}(y+x\sin x)\mathrm{d}x+(+\mathrm{e}^{y^2}-x)\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}}(y+x\sin x)\mathrm{d}x+(+\mathrm{e}^{y^2}-x)\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_D(-1-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}}x\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\iint\limits_D(-1-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=-2\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y-\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x$$
$$=-4-\pi.$$

三、1．解：曲线 $\begin{cases}z=6+2x^2+y^2\\ z=9-x^2-2y^2\end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影所围区域为 $D:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$
$$\oint\!\!\!\!\!\iint\limits_S\left[\frac{x}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)+x^3\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[y^3+y\left(1-\frac{1}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+f\left(\frac{x}{z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)+x^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3+y\left(1-\frac{1}{z}f\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(\frac{x}{z}\right)\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}[1+3(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1+3r^2)r\mathrm{d}r\int_{6+r^2+r^2\cos^2\theta}^{9-r^2-r^2\sin^2\theta}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1 3(1+3r^2)(1-r^2)r\mathrm{d}r=\cdots=3\pi.$$

2．解：S 上任意一点 $M(x,y,z)$ 到平面 π 的距离为

$$d=\frac{|2x+2y+z+6|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{1}{3}|2x+2y+z+6|.$$

令
$$F(x,y,z,\lambda)=(2x+2y+z+6)^2+\lambda(x^2+y^2-2z).$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x=4(2x+2y+z+6)+2\lambda x=0,\\ F_y=4(2x+2y+z+6)+2\lambda y=0,\\ F_z=2(2x+2y+z+6)-2\lambda\quad=0,\\ F_\lambda=x^2+y^2-2z=0,\end{cases}$$

得唯一的驻点 $(-2,-2,4)$.

由实际问题知存在最小值，因此 $P_0(x_0,y_0,z_0)=(-2,-2,4)$ 就是 S 上与 π 距离最近的点.

P_0 点到 π 的距离为 $d=\frac{1}{3}|2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+6|=\frac{2}{3}$.

3．解：$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(16-4\lambda)x^{\lambda+1}y-4\lambda x^{\lambda-1}y^3}{(x^2+y^2)^3}$，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2ax^3y-2axy^3}{(x^2+y^2)^3}$.

由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得 $\lambda=2,a=4$.

所以当 $\lambda=2,a=4$ 时，曲线在右半平面内与路径无关.

令 $\mathrm{d}u=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$u=\int\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x+c(y)=\frac{-2y^2}{x^2+y^2}+c(y).$$

再由
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-4y}{x^2+y^2}+\frac{4y^3}{(x^2+y^2)^2}+c(y)=\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}+c'(y)=\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2},$$

所以 $c'(y)=0$，则 $c(y)=c$. 因此全体原函数为

$$u(x,y)=-\frac{2y^2}{x^2+y^2}+c\quad 或\quad u(x,y)=\frac{2x^2}{x^2+y^2}+c.$$

（注意：$u(x,y)=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+c$ 也正确.）

4．证明：$\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right|=\left|f'(\xi_n)\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right|$，$\xi_n\in\left(\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$.

因为 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，所以 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有界，即 $\exists M>0$，使得 $|f'(x)|\leqslant M$. 从而

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|\leqslant M\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{M}{n^2}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right|$ 收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$ 绝对收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 8

一、填空题

1．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}=$________.

2．设 $u=e^{x^2+y^2+z^2},z=x^2\sin y$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$________.

3．函数 $z=3x^4+xy+y^3$ 在点 $M(1,2)$ 处沿与 Ox 轴的正向成 135° 角的方向上的方向导数等于________.

4．已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，其中 $\{a_n\}$ 单调递减且 $a_n>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 的收敛性为________.

5．已知 $u=x^2+y^3+xz^2$，则 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=$________.

6．设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & -\pi<x<0,\end{cases}$ 又 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为 $f(x)$ 的以 2π 为周期的傅里叶级数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和等于________.

二、计算题

1．设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数，其中 f,F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dy}{dx}$.

2．求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上平行于平面 $x+4y+6z=0$ 切平面的方程.

3．计算 $I=\iint\limits_{D}(x+x^2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D： $x^2+y^2-2x\leqslant 0$.

4.计算 $\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$ 及平面 $y=0$，$z=0,x+z=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的空间区域.

5．计算积分 $I=\int_L y\mathrm{d}x+|y-x^2|\,\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=2$，取逆时针方向.

三、综合与证明题

1．计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S}(x^3+az^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

2．求函数 $z=x^2+y^2-12x+16y$ 在区域 $D:x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最大值和最小值.

3．问 λ 取何值时，可使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并确定 $u(x,y)$ 的表达式.

4．设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上二阶可导， $f(-\pi)=f(\pi)$， n 为正整数， $a_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$，$b_n=\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x$. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 8 参考答案

一、1．0；2． $2x\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}(1+2x^2\sin^2 y)$ 或 $2x\mathrm{e}^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}(1+2x^2\sin^2 y)$；3． $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

4．收敛；5．0；6． $-\dfrac{\pi}{2}$.

二、1．解：将 y,z 视为 x 的函数，方程组 $\begin{cases} z-xf(x+y)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$ 两边对 x 求导得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-f(x+y)-xf'(x+y)\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0, \\ F_x'+F_y'\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z'\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{F_y'(f+xf')-xf'F_x'}{F_y'+xf'F_z'},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-F_z'(f+xf')-F_x'}{F_y'+xf'F_z'}.$$

2．解：令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21=0$，则曲面上任一点处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z).$$

设切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$，则有

$$\begin{cases}x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21,\\ x_0=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{z_0}{2}.\end{cases}$$

解得切点为 $M_1(1,2,2)$ 和 $M_2(-1,-2,-2)$．从而 $\boldsymbol{n}=\pm(2,8,12)$.

在 M_1 处切平面方程为 $(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$；

即
$$x+4y+6z=21,$$

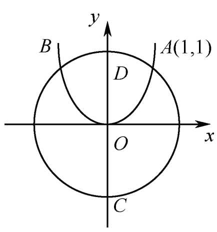
在 M_2 处切平面方程为 $(x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0$，

即
$$x+4y+6z=-21.$$

3．解：用极坐标：$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,\quad D:\begin{cases}-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\\ 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta.\end{cases}$

于是
$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D(x+x^2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\pi.\end{aligned}$$

4．解：
$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}y\cos(x+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(x+z)\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y\sin(x+z)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(1-\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$



5．解：求出曲线 $L:x^2+y^2=2$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点 $A(1,1)$ 和 $B(-1,1)$（见图 1）．

从而有
$$I=\int_{\overset{\frown}{ADB}} y\mathrm{d}x+|y-x^2|\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{BCA}} y\mathrm{d}x+|y-x^2|\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\overset{\frown}{ADB}} y\mathrm{d}x+(y-x^2)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{BCA}} y\mathrm{d}x-(y-x^2)\mathrm{d}y$$

图 1

$$=\oint_L y\mathrm{d}x+\oint_{\overset{\frown}{ADB}\cup\overline{BA}}(y-x^2)\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}(y-x^2)\mathrm{d}y+$$
$$\oint_{\overset{\frown}{BCA}\cup\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}y-\int_{\overline{AB}}(x^2-y)\,\mathrm{d}y$$
$$=-2\pi+\iint\limits_{D_1}(-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0+\iint\limits_{D_2}(2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$
$$=-2\pi.$$

三、1．解：记 S_0 为平面区域 $z=0, x^2+y^2\leqslant a^2$ 的下侧，Ω 为 S 与 S_0 所围成的空间区域.

$$I=\oiint\limits_{S+S_0}(x^3+az^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$
$$\iint\limits_{S_0}(x^3+az^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}a\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\mathrm{d}r$$
$$=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{1}{4}\pi a^5=\frac{29}{20}\pi a^5.$$

2．解：（1）先求函数 z 在区域 $x^2+y^2<25$ 内的驻点.

由方程组
$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-12=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+16=0,\end{cases}$$

解得驻点为 $(x_0,y_0)=(6,-8)$，不属于 D，因此函数的最大值和最小值都不会在 D 的内部达到. 只能在 D 的边界 $x^2+y^2=25$ 上达到.

（2）求 z 在边界 $x^2+y^2=25$ 上的最值.

设
$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25).$$

由方程组
$$\begin{cases}F_x=2x-12+2\lambda x=0,\\F_y=2y+16+2\lambda y=0,\\F_\lambda=x^2+y^2-25=0,\end{cases}$$

解得驻点为 $P_1(3,-4)$ 及 $P_2(-3,4)$.

由于 $z(3,-4)=-75, z(-3,4)=125$，故所求最大值为 $z(-3,4)=125$，最小值为 $z(3,-4)=-75$.

3. 解：$\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度等价于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

其中

$$P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}, Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}&=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-\lambda x^2\cdot 4x^3(x^4+y^2)^{\lambda-1}\\&=2x(x^4+y^2)^{\lambda}+2xy\cdot\lambda(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y.\end{aligned}$$

整理得

$$(x^4+y^2)(1+\lambda)=0\Rightarrow\lambda=-1.$$

因此

$$P=\frac{2xy}{x^4+y^2},\quad Q=-\frac{x^2}{x^4+y^2}.$$

取折线 $(1,0)\to(1,y)\to(x,y)$ 为积分路径，则

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_1^x 0\mathrm{d}x-\int_0^y\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^y\frac{1}{1+(y/x^2)^2}\mathrm{d}(y/x^2)=-\arctan\frac{y}{x^2}+C.$$

4．证明：

$$\begin{aligned}b_n&=\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x=f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=-n\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=-nf(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n^2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(-\sin nx)\mathrm{d}x=-n^2a_n.\end{aligned}$$

所以

$$a_n=-\frac{1}{n^2}b_n$$

即

$$\sqrt{|a_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|b_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n|\right).$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=}^{\infty}\sqrt{|a_n|}$ 收敛.

“高等数学 A（下）”期末试题 9

一、填空题

1．设 $\alpha>0$，且正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n^2+\alpha}}+\sin\dfrac{1}{n^2}\right)$________.（填收敛或

发散）

2．已知 $f(x)=x+1, x\in[0,1], S(x)$ 是 $f(x)$ 的周期为 1 的傅里叶级数的和函数，则 $S(0)=$ ________.

3．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1-\cos(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=$ ________.

4．设 $z=\int_0^{y^2} x^2\cos t\,\mathrm{d}t$，则 $\mathrm{d}z=$ ________.

5．函数 $u=x^2+y^2-z^2$ 在点 $(-1,1,2)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 方向上的方向导数等于________.

6．曲面 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切平面方程是______________.

7．设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\pi\}$，则 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

8．设 L 是以点 $(1,0)$ 为圆心，$R(>1)$ 为半径的圆周，L 取逆时针方向，则 $I=\oint_L\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=$ ________.

9．设 S 表示半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，则曲面积分 $I=\iint\limits_S(1-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

10．已知 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}+zx^2\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{A})=$ ________.

二、利用变换 $u=x-2\sqrt{y}, v=x+2\sqrt{y}$，化简方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

三、已知连续可微函数 $F(x)$ 满足 $F(0)=0$ 且 $F(t)=\iint\limits_D x\left[1-\dfrac{F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant t^2, x>0, y>0\}, t>0$，求 $F(t)$.

四、计算积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2}+4z\right)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是曲线 $\begin{cases}2z=y^2\\ x=0\end{cases}$ 与 y 轴及 $y=1$ 围成的平面区域绕 z 轴旋转一周所得旋转体.

五、求常数 a，使 $\dfrac{(ax+y)\mathrm{d}x-(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

六、计算积分 $I=\iint\limits_S[x^2\cos\alpha+(y^2+1)\cos\beta+(z^2+3)\cos\gamma]\mathrm{d}S$，其中 S 是曲面 $(y+1)^2=$

x^2+z^2 介于 $y=-1$ 及 $y=0$ 之间的部分，其法向量与 y 轴正向夹角大于 $\frac{\pi}{2}$，α,β,γ 为 S 上外法线的方向角.

七、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}$ 的收敛域及和函数的导数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}$ 的和.

八、设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 25\}$，证明：$\iint\limits_D(x^2+y^2-12x+16y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 5^5\pi.$

“高等数学 A（下）”期末试题 9 参考答案

一、1．收敛；2．$\frac{3}{2}$；3．$\sqrt{2}$；4．$2x\sin y^2\mathrm{d}x+2x^2y\cos y^2\mathrm{d}y$；5．$-\frac{14}{3}$；

6．$x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$；7．$\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{\pi}+1)$.；8．$\pi$；9．$\frac{\pi}{3}$；10．$2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$.

二、解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{y}}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y^3}}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

代入原方程得
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0,$$

即 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

三、解：因为
$$F(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\cos\theta\left[1-\frac{F(r)}{r^2}\right]r\mathrm{d}r=\int_0^t[r^2-F(r)]\mathrm{d}r,$$

于是
$$F'(t)=t^2-F(t),\quad F(0)=0.$$

解微分方程得
$$F(t)=t^2-2t+2-2\mathrm{e}^{-t}.$$

四、解：曲线 $\begin{cases}2z=y^2\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面为 $2z=x^2+y^2$，Ω 为曲面 $2z=x^2+y^2$

与柱面 $x^2+y^2=1$ 及 xOy 平面围成的部分.

采用柱面坐标计算.

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2}+4z\right)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{r^2/2}(r+4z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^1\left(\frac{r^4}{2}+\frac{r^5}{2}\right)\mathrm{d}r=\frac{11\pi}{30}.$$

五、解：
$$P(x,y)=\frac{ax+y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{-(x+y)}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2axy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2-y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

为使 $\dfrac{(ax+y)\mathrm{d}x-(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，必须满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

即 $a=-1$. 于是，有

$$\frac{(ax+y)\mathrm{d}x-(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\frac{(-x+y)\mathrm{d}x-(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

由于
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=\frac{-x+y}{x^2+y^2},$$

$$u(x,y)=\int\frac{-x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\arctan\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$ 是一次可微的任意函数. 又

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-x-y}{x^2+y^2}+\varphi'(y)=Q(x,y)=\frac{-x-y}{x^2+y^2}\Rightarrow\varphi'(y)=0\Rightarrow\varphi(y)=c,$$

从而
$$u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+c,$$

其中 c 是任意常数.

六、解： S 为曲面 $(y+1)^2=x^2+z^2$ 介于 $y=-1$ 及 $y=0$ 之间的部分. 有向曲面 $S_1:\begin{cases}x^2+z^2\leqslant 1,\\ y=0\end{cases}$ 法向量方向向右. 令 S 与 S_1 所围成的空间区域为 Ω. 则

$$I=\iint\limits_{S+S_1}\quad-\iint\limits_{S_1}$$

$$=\oiint\limits_{S+S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又
$$\oiint\limits_{S+S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r-1}^{0}(r\cos\theta+r\sin\theta+y)\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\left[(1-r)r\cos\theta+(1-r)r\sin\theta-\frac{1}{2}(1-r)^2\right]\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{\pi}{6},$$

$$\iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint\limits_{S_1}(y^2+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{x^2+z^2\leqslant 1}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pi.$$

所以
$$I=-\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{7\pi}{6}.$$

七、解：
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{3n+1}x^{3n+1}\Big/\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2}\right|=|x|^3.$$

令$|x|^3<1$，得$|x|<1$，于是幂级数的收敛半径为$R=1$.

易判别知，当$x=-1$时，级数发散，当$x=1$时，级数收敛，故收敛域为$(-1,1]$.

令$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3n-2}x^{3n-2},x\in(-1,1)$，则有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{3n-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}=\frac{1}{1+x^3},$$

从而
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}=S'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1+(1/2)^3}=\frac{8}{9}.$$

八、证明：令$z=x^2+y^2-12x+16y$，求z在D上的最值.

由$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x-12=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+16=0\end{cases}$得$z$的驻点不在$D$内，故$z$在$D$上的最值必在$D$的边界上达到.

为求z在D的边界上的最值，令

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(x^2+y^2-25),$$

由方程组
$$\begin{cases}F_x=2x-12-2\lambda x=0,\\ F_y=2y+16-2\lambda y=0,\\ F_\lambda=x^2+y^2-25=0,\end{cases}$$

得驻点 $P_1(3,-4), P_2(-3,4)$.

由于 $z(P_1)=-75, z(P_2)=125$. 易知 z 在 D 上的最大值为125.

故
$$\iint\limits_D (x^2+y^2-12x+16y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D 125\mathrm{d}x\mathrm{d}y=5^5\pi.$$

第三篇　高等数学 B

一、“高等数学 B（上）”期中试题

“高等数学 B（上）”期中试题 1

1．已知 $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\geqslant 8, \\ f(f(x+5)), & x<8, \end{cases}$ 则 $f(5)=$________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$________.

3．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right)=$________（$a\neq 0$）.

4．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

5．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+\tan x}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)}{\tan x-\sin x}=$________.

6．设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ a+x^2, & x\leqslant 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$________.

7．设 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}}$，则 $x=1$ 是________类型的间断点.

8．设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\mathrm{e}^{f(x)}-1}=1$，则 $f'(0)=$________.

9．设 $f'(x_0)$ 存在，则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=$________.

10．设 $y=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)$，则 $\mathrm{d}y|_{x=1}=$________.

11．设$\begin{cases} x=3t^2+2t, \\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}$________.

12．设$\begin{cases} x=f'(t), \\ y=tf'(t)-f(t), \end{cases}$ $f''(t)$存在且不为0，则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________________.

13．已知$f(x)=x\varphi(x^2)$，$\varphi(u)$具有二阶导数，则$f''(x)=$______________.

14．设$f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$，则$f^{(n)}(2)=$________.

15．螺线$\rho=\theta$在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$处的切线方程为________.

16．设$y=\ln(x+1)+\mathrm{e}^{2x}$的反函数为$x=g(y)$，则$g'(1)=$________.

17．设$f(x)$是3次多项式，且有$\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to 4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1$，则$\lim\limits_{x\to 3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}=$________.

18．设函数$f(x)=x^4$在区间[1,2]满足拉格朗日中值定理条件，则中值$\xi=$________.

19．注水于深8m上顶直径8m的正圆锥形容器中，其速率为$4\mathrm{m}^3/\min$，当水深为5m时，其水面上升的速率为________.

20．设$f(x)=3x^3+x^2|x|$，则$f^{(n)}(0)$存在的最高阶数$n=$________.

“高等数学B（上）”期中试题1参考答案

1．6；2．e；3．a；4．$\dfrac{3}{2}$；5．$\dfrac{1}{3}$；6．0；7．第一类跳跃；8．0；9．$f'(x_0)$；10．$\dfrac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\mathrm{d}x$；

11．$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$；12．$\dfrac{1}{f''(t)}$；13．$6x\varphi'(x^2)+4x^3\varphi''(x^2)$；14．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}n!$；15．$y-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{2}{\pi}x$；16．$\dfrac{1}{3}$；

17．$-\dfrac{1}{2}$；18．$\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$；19．$\dfrac{16}{25\pi}\approx 0.204\mathrm{m}/\min$；20．2.

“高等数学B（上）”期中试题2

1．设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$，则$f(-x)=$__________________.

2．设$f(x)=2x^2+3+4x\cdot[\lim\limits_{x\to 1}f(x)]$，其中$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$存在，则$f(x)=$_______________.

3．当$x\to 0$时，若$(1-\cos x)\cdot\ln(1+x^2)=o(x\sin^n x)$，且$x\sin^n x=o(\mathrm{e}^{x^2}-1)$，则正整数

$n=$________.

4．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x+1}\right)^x=$________.

5．极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}=$________.

6．极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}\right)=$________.

7．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left(1-\cos\dfrac{x^2}{2}\right)}{\ln^4(1+x)}=$________.

8．设 $p(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)-x^3}{x^2}=2$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(x)}{x}=1$，则 $p(x)=$________.

9．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{2}}-1}{\sin 2x}, & x>0,\\ x+a+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$________.

10．设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{|x|}$，则 $x=0$ 是________类型的间断点.

11．设 $f'(a)=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$________.

12．设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-2012)$，则 $f'(0)=$________.

13．设 $y=\ln(x+1)+\mathrm{e}^{2x}$ 的反函数为 $x=g(y)$，则 $g'(1)=$________.

14．设 $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$，其中 $f(x)$ 是可微函数，则 $\mathrm{d}y=$____________________.

15．设 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$________.

16．设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________________.

17．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}=$________.

18．设 $y=\mathrm{e}^{x^{100}}$，则 $y^{(2012)}(0)=$________.

19．当 $x\to 0$ 时，$\cos x-\cos 2x$ 是 x 的________阶无穷小量.

20．试写出 $f(x)=\ln(1+x)$ 在 $x_0=0$ 点带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式为________.

“高等数学 B（上）”期中试题 2 参考答案

1． $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ x^2-x, & x<0\end{cases}$；2． $f(x)=2x^2+3-\dfrac{20}{3}x$；3．2；4． $e^{\frac{1}{2}}$；5． $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$；6． $-\dfrac{1}{2}$；

7． $\dfrac{1}{32}$；8． x^3+2x^2+x；9． $-\dfrac{4}{3}$；10．第一类可去；11．$f(a)-ab$；12．2012!；13． $\dfrac{1}{3}$；

14． $[f'(e^x)e^{x+f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)]dx$；15． $\dfrac{3}{2}$；16． $\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$；17．1；18．0；

19．2；20． $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}+o(x^n)$.

“高等数学 B（上）”期中试题 3

1．函数 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{(x+x^2)\ln(1+x)\arcsin x}=$________.

3．极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$________.

4．极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

5．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}=$________.

6．设 $f(x)=\begin{cases}e^x & ,x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 要使 $f(x)$在（$-\infty,+\infty$）内连续，则 $a=$________.

7．设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是________类型的间断点.

8．设 $f'(a)$ 存在，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{\alpha h}=$________.

9．设 $y=x^2e^{2x}$，则 $y^{(20)}(0)=$________.

10．设 $y=\ln^2(1-x)$，则 $\mathrm{d}y=$________.

11．设 $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta) \\ y=\theta\cos\theta \end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________.

12．设 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定一元函数 $y=y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$________.

13．极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln^4(1+x)}=$________.

14．设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $y^{(101)}(0)=$________.

15．函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为________.

16．曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线有________条.

17．设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数为________.

18．设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

19．设 $x\to0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 是 x 的 3 阶无穷小，则 $a=$________，$b=$________.

“高等数学 B（上）”期中试题 3 参考答案

1．$\{x|x\leqslant3$ 且 $x\neq0\}$；2．$\dfrac{1}{6}$；3．$\dfrac{1}{2}$；4．$-\dfrac{1}{2}$；5．-3；6．1；7．第一类跳跃；8．$f'(a)$；9．$2^{20}\cdot95$；10．$\dfrac{2\ln(1-x)}{x-1}\mathrm{d}x$；11．$\dfrac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$；12．$-\dfrac{1+t^2}{t^3}$；13．$-\dfrac{1}{12}$；14．0；15．$\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$；16．1；17．2；18．4；19．$a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{1}{2}$.

二、“高等数学 B（上）”期末试题

“高等数学 B（上）”期末试题 1

一、填空题

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t}=$________.

2．已知 $f(0)=0, f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2f(x))^{\frac{1}{\sin 3x}}=$________.

3．设函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可微，且它在 $x=0$ 的某邻域内满足 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=2+8x+o(x)$，则 $f'(1)=$________.

4．曲线 $\rho=\theta$ 上 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为________.

5．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 $n+1$ 阶导数，写出其带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林展式________.

6．定积分 $\int_0^4 \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}}\mathrm{d}x=$________.

7．定积分 $\int_{-1}^1\left(\dfrac{x^2\sin x}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

8．反常积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}=$________.

9．常微分方程 $xy'+x\tan\dfrac{y}{x}=y$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{\pi}{2}$ 的解为________.

10．设 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 区间上连续单调减少的上凹曲线，设

$$A_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x，\quad A_2=\int_a^b f(a)\mathrm{d}x，\quad A_3=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]，$$

则 A_1,A_2,A_3 的大小关系为________.

二、解答题

1．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

2．求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ 的单调区间，极值和极值点.

3．设 $f(2)=1, f'(2)=0, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$．

4．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 连续，且 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$．

三、求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}+6x^2-10x+2$ 的通解.

四、（1）求曲线弧 $y=x-x^2$ 与 x 轴围成的封闭图形的面积，

（2）求上述图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

五、若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶导数，$f''(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

“高等数学 B（上）”期末试题 1 参考答案

一、1．1；2．$\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$；3．2；4．$y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$；

5．$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ξ 在 0 与 x 之间；

6．$\dfrac{10}{3}$；7．$\dfrac{\pi}{2}$；8．$\dfrac{\ln 4}{3}$；9．$\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x}$；

10．$A_1 \leqslant A_3 \leqslant A_2$．

二、1．解：由 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{1+t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

故
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1\cdot\frac{1+t^2}{t}=\frac{1+t^2}{t}.$$

2．解：函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

$f'(x)=1-\dfrac{8}{x^3}$，故驻点为$x=2$.

当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$,

当$x\in(0,2)$时，$f'(x)<0$,

当$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$,

故函数的增区间为$(-\infty,0)$及$(2,+\infty)$，减区间为$(0,2]$； $x=2$为极小值点, 极小值为$f(2)=3$.

3．解：

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}f'(2x)=\frac{1}{2}x^2 f'(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 2xf'(2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}f(2x)=-\frac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=0.$$

4．解：对$f(x)=\dfrac{x}{1+x}+\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$两端同乘以$x$，并从0到1积分得

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\int_0^1 x\mathrm{d}x,$$

整理得

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=2\cdot\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2[x-\ln(1+x)]\Big|_0^1=2(1-\ln 2).$$

故
$$f(x)=\frac{1}{1+x}+2(1-\ln 2).$$

三、解：（1）求齐次方程的通解.

$y''-5y'+6y=0$的特征方程为$\lambda^2-5\lambda+6=0$. 有$\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

（2）求非齐次方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的特解.

由于 2 是特征单根，可设此时特解为

$$y_1^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x},$$

带入上述方程得 $A=-\dfrac{1}{2},B=-1$.

即
$$y_1^*=-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

（3）求非齐次方程 $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$ 的特解.

由于 0 不是特征根，可设此时特解为

$$y_2^*=Ex^2+Fx+G,$$

带入上述方程得 $E=1,F=G=0$.

即
$$y_2^*=x^2.$$

于是原方程通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\mathrm{e}^{2x}+x^2.$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

四、解：（1）曲线弧 $y=x-x^2$ 与 x 轴交点为(0,0)和(1,0)，于是

$$A=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

（2）
$$V=\pi\int_0^1(x-x^2)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}.$$

五、证法一　构造辅助函数

$$F(t)=(t-a)\frac{f(a)+f(t)}{2}-\int_a^t f(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$F'(t)=\frac{f(a)+f(t)}{2}+\frac{t-a}{2}f'(t)-f(t)$$

$$=\frac{f(a)-f(t)}{2}+\frac{t-a}{2}f'(t)$$

$$=\frac{t-a}{2}[f'(t)-f'(\xi)],\quad \xi\in(a,t).$$

由 $f''(x)>0$ 知 $F'(t)>0$，又 $F(a)=0$

故
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证法二　利用函数曲线是上凹曲线的性质.

由 $f''(x)>0$ 知过 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的弦在曲线上方，知

$$f(x)<f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

对上式两端从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证法三　利用泰勒展式.

将 $f(t)$ 在 x 展到一阶带拉格朗日余项的泰勒公式.

取 $t=a,t=b$，则

$$f(a)=f(x)+f'(x)(a-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(a-x)^2,\quad \xi_1\text{在}a\text{与}x\text{之间},$$

$$f(b)=f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(b-x)^2,\quad \xi_2\text{在}b\text{与}x\text{之间},$$

又 $f''(x)>0$，得

$$\frac{x-a}{b-a}f(b)+\frac{b-x}{b-a}f(a)>f(x),$$

对上式两端从 a 到 b 积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

“高等数学 B（上）”期末试题 2

一、填空题

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\tan x}}{x-\tan x}=$________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{d}{dx}\int_0^{x^2}\dfrac{\sin t}{t\sqrt{t}}dt=$________.

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{x+y}e^{-t^2}dt=0$ 确定，则 $y'(0)=$________.

4．曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 的所有渐近线为________________.

5．定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=$________.

6．定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{x^2\sin x}{1+x^2}+\cos x\right)dx=$________.

7．反常积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=$________.

8．常微分方程 $x^2y'+(1-2x)y=x^2$ 满足 $y\big|_{x=1}=0$ 的解为________________.

二、选择题

1．设 $y=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$，则 a,b 分别为（　　），可使得 $x=0$ 为 y 函数的无穷间断点，$x=1$ 为 y 函数的可去间断点.

（A）$a=0,b=e$；　　（B）$a=0,b=1$；

（C）$a=1,b=e$；　　（D）$a=1,b=0$.

2．设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，则 $f'(0)=$（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

3．若 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln x$，则 $f'(x)=$（　　）.

（A）$\dfrac{1}{x}$　　（B）$x\ln x$　　（C）$-\dfrac{1}{x^2}$　　（D）e^x

4．设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，则 $y^{(2013)}(0)=$（　　）.

（A）1；　　（B）0；　　（C）$(2013)!$；　　（D）e.

5．若定义在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(-x)$，且在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内（　　）.

（A）$f'(x)<0, f''(x)<0$；　　（B）$f'(x)<0, f''(x)>0$；

（C）$f'(x)>0, f''(x)<0$；　　（D）$f'(x)>0, f''(x)>0$.

三、解答题

1．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1+t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2．（1）求由抛物线 $y=\sqrt{x}$ 和直线 $y=x$ 所围成平面图形的面积;

（2）求上述平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

3．求微分方程 $y''+4y=3\mathrm{e}^x$ 的通解.

4．设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}x^2, & x>1, \end{cases}$ 计算 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

5．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

6．若函数 $f(x)$ 有二阶导数，$f''(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，证明：$f(x)\geqslant x$.

7．试证方程 $\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 有且仅有一实根.

“高等数学 B（上）”期末试题 2 参考答案

一、1．1；2．2；3．e−1；4．水平渐近线 y=1，铅直渐近线 x=1；5．$\dfrac{\pi}{2}$；

6．0；7．$\dfrac{\pi}{2}$；8．$y=x^2\left(1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-1}\right)$.

二、1．A；2．A；3．C；4．B；5．C.

三、1．解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{(1+t)\mathrm{e}^{t}}{\mathrm{e}^{-t}}=(1+t)\mathrm{e}^{2t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=(3+2t)\mathrm{e}^{3t}.$$

2．

解：（1）

$$A=2\int_0^1(2-x^2-x^2)\mathrm{d}x=4\left[x-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}.$$

（2）

$$V=2\pi\int_0^1 x(2-x^2-x^2)^2\mathrm{d}x=4\pi\int_0^1(x-x^3)\mathrm{d}x=\pi.$$

3．解：（1）求齐次方程的通解.

$y''+4y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+4=0$，有 $\lambda_1=2i,\lambda_2=-2i$.

齐次方程的通解为

$$\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x,$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

（2）求非齐次方程 $y''+4y=5\mathrm{e}^{x}$ 的特解.

由于 1 不是特征根，可设此时特解为

$$y_2^*=A\mathrm{e}^{x}$$

带入上述方程得 $A=1$.

即 $y_2^*=\mathrm{e}^{x}$.

于是原方程通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\mathrm{e}^{x}.$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

4．
$$\begin{aligned}&\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}x\\ &=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2\\ &=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{6}(8-1)\\ &=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

5．解：对 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}+x\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 两端从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\int_0^1 x\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x,$$

整理得
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\ln 2,$$

于是
$$f(x)=\frac{1}{1+x}+2\ln 2x.$$

6．证明：由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 可知 $f(0)=0, f'(0)=1$.

由 $f(x)$ 有二阶导数，把 $f(x)$ 在 $x=0$ 展成带有拉格朗日余项的一阶泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2,$$

由 $f''(x)>0$ 得 $f(x)\geqslant x$.

7．证明：令
$$F(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

$F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 连续，所以

$$F(0)=\int_1^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0,$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t>0.$$

由零点定理知 $F(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在零点. 而

$$F'(x)=\sqrt{1+x^4}+\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot\sin x,$$

$$\sqrt{1+x^4}\geqslant 1, 0<\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\leqslant 1, -1\leqslant\sin x\leqslant 1,$$

$$F'(x)=\sqrt{1+x^4}+\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot\sin x>0,$$

可得 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

故方程 $\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 有且仅有一实根.

“高等数学 B（上）”期末试题 3

一、填空题

1．设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=3$，$\boldsymbol{b}=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

2．极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$________.

3．当 $x\to 0$ 时，若 $(1-\cos x)\cdot\ln(1+x^2)=o(x\sin^n x)$，且 $x\sin^n x=o(\mathrm{e}^{x^2}-1)$，则正整数 $n=$________.

4．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$________.

5．若 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{x^2}，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$________.

6．若函数 $f(x)$ 连续，设 $F(x)=\int_a^b f(x+t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$________.

7．反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.

8．微分方程 $y'=\mathrm{e}^{2x-y}$ 满足 $y|_{x=0}=0$ 的解为________.

二、选择题

1．$x=0$是函数$y=\arctan\dfrac{1}{|x|}$的（　　）间断点.

（A）可去；　　（B）跳跃；　　（C）无穷；　　（D）振荡.

2．设$y=e^{x^2}$，则$y^{(2011)}(0)=$（　　）.

（A）1；　　（B）0；　　（C）(2011)!；　　（D）e.

3．已知$f(x)=x\varphi(x^2)$，$\varphi(u)$具有二阶导数，则$f''(x)=$（　　）.

（A）$6x\varphi'(x^2)+4x^3\varphi''(x^2)$；　　（B）$6x\varphi'(x^2)+2x^2\varphi''(x^2)$；

（C）$2\varphi'(x^2)+x^2\varphi(x^2)$；　　（D）$\varphi(x^2)+4x\varphi'(x^2)+2x^2\varphi''(x^2)$.

4．设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解．若$f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则$f(x)$在x_0（　　）.

（A）取得极大值；　　（B）取得极小值；

（C）某邻域内单调增加；　　（D）某邻域内单调减少.

5．双纽线$r^2=\cos 2\theta$所围成图形的面积是（　　）.

（A）$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$；　　（B）$4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$；

（C）$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x \mathrm{d}x$；　　（D）$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x \mathrm{d}x$.

三、解答题

1．设函数$y=y(x)$有参数方程$\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

2．求曲线弧$y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$与$x$轴围成的图形分别绕$x$轴，$y$轴旋转所成旋转体的体积.

3．计算下列积分

（1）设$f(x)=\int_0^{a-x}e^{y(2a-y)}\mathrm{d}y$，则$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^a\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

4．求微分方程 $y''-5y'+6y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

5．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且为单调增加函数，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x .$$

附加题

6．若 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，$a>0$，且 $f''(x)\geqslant 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant af\left(\frac{a}{2}\right).$$

“高等数学 B（上）”期末试题 3 参考答案

一、1．3；2．e；3．2；4．ln2；5．$2x^2\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{x^2}+c$；

6．$f(b+x)-f(a+x)$；7．$\dfrac{\pi^2}{8}$；8．$\mathrm{e}^y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{2}$.

二、1．A；2．B；3．A；4．A；5．A.

三、1．解：由 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$ 知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{1+t^2}，\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{t};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1+t^2}{t}=-\frac{1+t^2}{t^3}.$$

2．解：

绕 x 轴旋转体体积为

$$V_x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

绕 y 轴旋转体体积

$$V_y=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi x\cos x\mathrm{d}x=2\pi x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\pi^2-1.$$

3．（1）解：
$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left[\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$
$$=x\int_0^{a-x}\mathrm{e}^{y(2a-y)}\mathrm{d}y\Big|_0^a+\int_0^a x\mathrm{e}^{(a-x)(a+x)}\mathrm{d}x$$
$$=\mathrm{e}^{a^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^a\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)$$
$$=\mathrm{e}^{a^2}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^a$$
$$=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a^2}-1).$$

（2）解：令 $x=a\sin t$ ，则
$$\int_0^a\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a\sin t+a\cos t}=I,$$
又
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}=\frac{\pi}{2},$$
故
$$\int_0^a\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

4．解：（1）求齐次方程的通解.

$y''-5y'+6y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-5\lambda+6=0$，有 $\lambda_1=2,\lambda_2=3$.

齐次方程的通解为
$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x},$$
其中 C_1,C_2 为任意常数.

（2）求非齐次方程 $y''-5y'+6y=\mathrm{e}^{2x}$ 的特解.

由于 2 是特征单根，可设此时特解为
$$y_2^*=Dx\mathrm{e}^x,$$
带入上述方程得 $D=-1$.

即
$$y_2^*=-x\mathrm{e}^x.$$

于是原方程通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - xe^x$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

5．证明:

令
$$F(t) = (a+t)\int_a^t f(x)\mathrm{d}x - 2\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x\,,$$

由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $F(t)$ 在 $[a,b]$ 可导，且

$$F'(t) = \int_a^t f(x)\mathrm{d}x + (a+t)f(t) - 2tf(t)$$
$$= \int_a^t f(x)\mathrm{d}x - \int_a^t f(t)\mathrm{d}x = \int_a^t [f(x) - f(t)]\mathrm{d}x \leqslant 0\,,$$

知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调减少，又 $F(a)=0$，故 $F(b)\leqslant 0$，证毕.

附加题

6．证明：把 $f(x)$ 在 $\dfrac{a}{2}$ 展到一阶带拉格朗日余项的泰勒公式为

$$f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2,\ \xi\text{在}x\text{与}\frac{a}{2}\text{之间}.$$

又 $f''(x)\geqslant 0$，则有

$$f(x) \geqslant f\left(\frac{a}{2}\right) + f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right),$$

对上式从 0 到 a 积分得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant af\left(\frac{a}{2}\right) + \int_0^a f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x = af\left(\frac{a}{2}\right).$$

三、“高等数学 B（下）”期中试题

“高等数学 B（下）”期中试题 1

1．级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$ 是________.（收敛，发散）

2．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n$是________.（收敛，发散）

3．设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\quad(u_n>0,n=1,2,\cdots)$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\,u_{2n-1}$是________的.（收敛或发散）

4．级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin^2\frac{n\pi}{4}}{3^n}$是________.（收敛，发散）

5．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$的和函数是________.（标清收敛域）

6．设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-5)^n$在$x=2$处收敛，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x+3)^{n-1}$在$x=\frac{1}{2}$处敛散性为________.（绝对收敛、条件收敛、发散或不能确定）

7．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$的收敛半径$R=$________.

8. 设函数$f(x)=x^2,0\leqslant x\leqslant 1$，而$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<\infty$，其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$，$n=1,2,3,\cdots$，则$s\left(-\frac{1}{2}\right)=$________.

9. 将$f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$展成以2为周期的傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$，则$a_3=$________.

10．函数$z=\arcsin\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$的定义域是________.

11．极限$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{xy-1}{\sqrt{xy+3}-2}=$________.

12．函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在(0,0)点________.（连续，不连续）

13．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy-y}{xy^2}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0\end{cases}$ 则 $f_y(1,0)=$________.

14．已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 $(a,b)=$________.

15．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都连续是函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处方向导数存在的________条件.（充分，必要，充要）

16．设函数 $u=f(x,y,z)$,（其中f可微），又 $z=x^2\sin t, t=\ln(x+y)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$____________.

17．设 $w=f(x+y+z,xyz)$,（其中f具有二阶连续偏导数），则 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=$________________.

18．曲线 $x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u$, $y=2\sin t+\cos t, z=1+\mathrm{e}^{3t}$ 在点 $(0,1,2)$ 处的法平面方程为______________.

19．曲面 $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ 在点(2,2,1)处的法线方程为______________.

20．函数 $z=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $(1,1)$ 处，沿函数在该点梯度方向的方向导数为________.

“高等数学 B（下）”期中试题 1 参考答案

1．发散；2．收敛；3．收敛；4．收敛；5．$\dfrac{3x-x^2}{(1-x)^2},|x|<1$；6．不能确定；7．$\sqrt{3}$；8．$-\dfrac{1}{4}$；

9．$-\dfrac{4}{9\pi^2}$；10．$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1,x>0,|y|\leqslant|x|\}$；11．4；12．不连续；13．$-\dfrac{1}{6}$；14．$(2,-2)$；

15．充分；16．$f_x+\left(2x\sin t+\dfrac{x^2\cos t}{x+y}\right)f_z$；17．$yf_2+f_{11}+(xy+yz)f_{12}+xy^2zf_{22}$；

18．$x+2y+3z-8=0$；19．$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$；20．$\sqrt{2}$.

“高等数学 B（下）”期中试题 2

1．设 α 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$________.（收敛，发散，敛散性与 α 有关）

2．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ ________．（收敛，发散）

3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数是________．（标清收敛域）

4．设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$ 的收敛区间为________.

5．设函数 $f(x)=x^2,0\leqslant x\leqslant 1$，而 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,n=1,2,3,\cdots$，则 $s\left(-\frac{1}{2}\right)=$________.

6.将 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展成以 2 为周期的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$，则其中 $a_3=$________.

7．将 xOy 坐标面上双曲线 $4x^2-9y^2=36$ 绕 x 轴旋转一周，所生成旋转曲面方程为________________.

8．将空间曲线方程 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16\\x+z=0\end{cases}$ 化为参数方程为________．（形式不唯一）

9．曲面 $2^{x/y}+2^{y/z}=8$ 在点（2,2,1）处的切平面方程为__________________.

10．曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=16\\x+z=0\end{cases}$ 在点（1,1,−2）处的切线方程为________________.

11．函数 $f(x,y)=\frac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域是________.

12．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\y\to 0}}\frac{\sin(xy)\cos(xy)}{y}=$________.

13．函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0\\0, & xy\neq 0\end{cases}$ 在（0,0）点________．（连续，不连续）

14．函数 $z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$ 的一阶偏导数 $z_x(0,1)=$________.

15．设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f_x(0,0)=$________.

16．已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某二元函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 $(a,b)=$________.

17．二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处四条性质（1）连续，（2）两个偏导连续，（3）可微，（4）两个偏导存在，则________.

（A）（2）→（3）→（1）；　　（B）（3）→（2）→（1）；

（C）（3）→（4）→（1）；　　（D）（3）→（1）→（4）.

18．设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,\ y=\sin x$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=$________.

19．设 $z=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f,φ 具有二阶连续偏导数，则 $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

20．函数 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 在点(1,−1,0)处最大方向导数为________.

“高等数学 B（下）”期中试题 2 参考答案

1．发散；2．收敛；3． $\dfrac{2x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x},x\in(-1,1)$；4．（−2,4）；5． $-\dfrac{1}{4}$；

6． $\dfrac{-4}{9\pi^2}$；7． $4x^2-9(y^2+z^2)=36$；

8． $\begin{cases}x=2\sqrt{2}\cos t,\\ y=4\sin t, \qquad t\in[0,2\pi]\\ z=-2\sqrt{2}\cos t,\end{cases}$.（形式不唯一）；

9．$x+y-4z=0$；10． $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{0}$；11． $\{(x,y)\,|\,2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x>y^2\}$

12．2；13．不连续；14．1；15．0；16．（2,−2）；17．A；

18． $f_x+f_y\cos x-\dfrac{2xf_z\varphi_1+\mathrm{e}^y\varphi_2\cos x}{\varphi_3}$；19．0；20． $\dfrac{1}{2}$.

“高等数学 B（下）”期中试题 3

1．无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ ________.（收敛，发散）

2．无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\quad(\alpha>0\text{常数})$ ________.（发散，条件收敛，绝对收敛，不确定）

3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n4^n}\left(x+1\right)^{2n-1}$ 的收敛域为________.

4．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数为______________.

5．设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1,\end{cases}$ $s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x,\quad -\infty<x<\infty$，其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots$，则 $s\left(-\frac{5}{2}\right)=$________.

6．设函数 $f(x)=\pi x+x^2$，$-\pi<x<\pi$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则系数 $b_3=$________.

7．设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

8．设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=$________，$\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$________.

9. 设一平面经过原点及 $(6,-3,2)$，且与平面 $\pi:4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程________.

10．xOz 平面上曲线 $z^2=2x$ 绕 x 轴旋转所成旋转曲面方程为______________.

11．曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 在 yOz 平面上投影方程为______________.

12．函数 $z=\arcsin(2x)+\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为________.

13．$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\alpha)}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$,$\alpha\neq 0$ 为________.

14．$f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin\pi y+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x'(1,1)=$________.

15．设 $z=x\ln(xy)$，则 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=$________.

16．设 $z=\dfrac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$，$\varphi(u)$ 为可导函数，则 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

17．设 $f(x,y)$ 可微，且 $f(0,0)=0$，$f_x'(0,0)=a$，$f_y'(0,0)=b$，若 $\varphi(t)=f(t,f(t,t))$，则 $\varphi'(0)=$________.

18．设 $u=x^3y^2z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 为由方程 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$ 所确定的函数，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(-1,0,1)}=$________.

19．二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 处________.

（A）连续，偏导存在；　　（B）连续，偏导不存在；

（C）不连续，偏导存在；　　（D）不连续，偏导不存在.

“高等数学 B（下）”期中试题 3 参考答案

1．收敛；2．绝对收敛；3．[−3，1]；4．$\dfrac{2x}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{1-x},x\in(-1,1)$；　5．$\dfrac{3}{4}$；6．$\dfrac{2\pi}{3}$；7．4；

8．$\left\{\dfrac{2}{\sqrt6},\dfrac{-1}{\sqrt6},\dfrac{-1}{\sqrt6}\right\}$，$-\dfrac{\sqrt6}{2}$；9．$2x+2y-3z=0$；10．$y^2+z^2=2x$；11．$\begin{cases}3y^2-z^2=16,\\ x=0;\end{cases}$

12．$\left\{(x,y)\,|\,0<x^2+y^2<1,4x\geqslant y^2,|x|\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$；13．$\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}}$；14．$\dfrac{\pi}{4}$；15．0；16．$-y^2$；17．$b^2+ab+a$；

18．0；19．C.

四、“高等数学 B（下）”期末试题

“高等数学 B（下）”期末试题 1

一、填空题

1．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\tan\frac{\pi}{4^n}$ ________（收敛或发散）.

2．数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n}$ ________（条件收敛，绝对收敛或发散）.

3．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy\left[1-\cos(x^2+y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2\sqrt{x^2+y^2}}=$________.

4．设函数 $f(x,y)$ 满足 $f_{yy}(x,y)=2$,且 $f(x,0)=1$, $f_y(x,0)=x$ ，则 $f(x,y)=$________.

5．设周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0),\\ \mathrm{e}^x, & x\in[0,\pi),\end{cases}$ 则它的傅里叶级数在 $x=0$ 处收敛于________.

6．设 $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$, $\varphi(u)$ 为可导函数，则 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=$ ____________________.

7．曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=4\\ 2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为____________________.

8．设 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=\{x,y,z\}$ 则 $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{u})=$________.

9．二重积分 $\iint\limits_D x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________，其中 D 是由 $y=4-x^2, y=-3x, x=1$ 所围的区域.

10．已知椭圆 $L:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 周长为 A，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$________.

二、求圆周 $(x+1)^2+y^2=1$ 上的点与定点 $(0,1)$ 的距离的最小值与最大值.

三、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 收敛域与和函数，并由此求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

四、计算下列积分.

1．设 L 是 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 的一段，求 $\int_L e^{y^2}\sin 2x\mathrm{d}x+e^{\sin x}\mathrm{d}y$.

2．设 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2$，　$z\leqslant 1$ 的下侧，求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3．设 Ω 为闭区域 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$ ，$1\leqslant z\leqslant 2$ ，求 $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}v}{z^2}$.

五、设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处指向外侧的法向量.

求（1）函数 $u=x^2+3xy^2+6x+z^3$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数；

（2）把对坐标的曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转换为对坐标 xy 的曲面积分形式，并计算结果.

六、证明：$(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$ 在 xOy 面内是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，求出这个二元函数 $u(x,y)$,并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$.

“高等数学 B（下）”期末试题 1 参考答案

一、1．收敛；2．绝对收敛；3．0；4． y^2+xy+1；5． $\dfrac{1}{2}$；6． $-y^2$；

7． $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$；8．0；9．0；10．$12A$.

二、解：设圆周上点的坐标为(x,y)．则目标函数为

$$D(x,y)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\ .$$

不失一般性，拉格朗日函数为

$$F(x,y,\lambda)=x^2+(y-1)^2+\lambda[(x+1)^2+y^2-1],$$

由
$$\begin{cases}F_x=2x+2(x+1)\lambda=0,\\ F_y=2(y-1)+2y\lambda=0,\\ F_\lambda=(x+1)^2+y^2-1=0,\end{cases}$$

解得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1, y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, z=\pm\sqrt{2}-1$ 为驻点，由实际意义可知此点为最值点．且在

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$点取得最小值$\sqrt{2}-1$.在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$点取得最大值$\sqrt{2}+1$.

三、解：由比值法或根值法求收敛半径为 1，则收敛域$[-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x)\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=-[-\ln(1-(-1))]=\ln 2\ .$$

四、1．解：

$$\int_L \mathrm{e}^{y^2}\sin 2x\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\mathrm{e}^{\sin^2 x}\sin 2x+\mathrm{e}^{\sin x}\cos x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin^2 x}\mathrm{d}\sin^2 x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\sin x=2\mathrm{e}-2.$$

2．解：补充面$\Sigma^*:\begin{cases}z=1,\\x^2+y^2=1,\end{cases}$取上侧．那么

$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma^*}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint_{\Sigma^*}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

其中

$$\iint_{\Sigma+\Sigma^*}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\rho\mathrm{d}z=\frac{3\pi}{2}\ ,$$

$$\iint_{\Sigma^*}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(1-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-\rho\cos\theta)\rho\mathrm{d}\rho=\pi.$$

故
$$I=\iint_{\Sigma}(x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

3．解：

选择球面坐标系，可得
$$I=\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}v}{z^2}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}}\frac{r^2\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}\mathrm{d}r=\pi.$$

五、解：（1）
$$\mathrm{grad}\boldsymbol{u}=(2x+3y^2+6,6xy,3z^2)=\left(\frac{31}{4},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right),$$

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的外法向量 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)$.

曲面 $\Sigma:z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处指向外侧的单位法向量 $\boldsymbol{n}^0=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故方向导数为 $\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{31}{4},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{37}{8}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

（2）
$$I=\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left[yz\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+x\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D}[y^2+x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}.$$

六、证明：（1） $p(x,y)=(1-2xy-y^2)$,　$Q(x,y)=-(x+y)^2$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=-2(x+y)=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

故 $(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$ 是二元函数的全微分.

（2）
$$\frac{\partial u}{\partial x}=(1-2xy-y^2),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-(x+y)^2.$$

由偏积分的方法可得
$$u(x,y)=x-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C.$$

（3）
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$$
$$=x-x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=-\frac{4}{3}.$$

“高等数学 B（下）”期末试题 2

一、填空题

1．数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ ________（收敛或发散）．

2．若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ ________（收敛或发散）．

3．设函数 $f(x)=x^2,0\leqslant x<1$，而 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,-\infty<x<\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x,n=1,2,3,\cdots$，则 $s\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$________.

4．函数 $f(x,y)=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域是________.

5．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$________.

6． $f(x,y)=x+(y-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x'(0,1)=$________.

7．设 $z=xy+\dfrac{x}{y}$，则 $\mathrm{d}z=$________.

8．设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\mathrm{grad}\,f(0,0,0)=$________.

二、选择题

1．设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$（　　）．

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点；　　（B）不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（C）是 $f(x,y)$ 的极大值点；　　（D）是 $f(x,y)$ 的极小值点.

2．二重积分 $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 交换积分顺序后应为（　　）．

（A）$\int_0^4 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$；　　（B）$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$；

（C）$\int_0^4 dx\int_{2x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$；　　（D）$\int_0^2 dx\int_{2x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.

3．设 D 是以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D \left(x\sin y + y\cos x\right)dxdy =$（　　）.

（A）$2\iint\limits_{D_1} x\sin y dxdy$；　　（B）$2\iint\limits_{D_1} y\cos x dxdy$；

（C）$4\iint\limits_{D_1} (x\sin y + y\cos x)dxdy$；　　（D）0.

4．设积分 $\int_L x\varphi(y)dx + x^2 ydy$ 与路径无关，其中 $\varphi(0)=0$，$\varphi(y)$ 有一阶连续导数，则 $\int_{(0,1)}^{(1,2)} x\varphi(y)dx + x^2 ydy =$（　　）.

（A）2；　　（B）$\dfrac{1}{2}$；　　（C）3；　　（D）1.

5．设 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦，则 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}ds =$（　　）.

（A）4π；　　（B）2π；　　（C）π；　　（D）0.

三、证明由方程 $u = y + x\varphi(u)$ 确定的函数 $u=u(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$.

四、求曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=4 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

五、求内接于椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积最大的长方体的体积，长方体的各个面平行于坐标面.

六、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛区间与和函数.

七、计算下列积分.

1．设 L 是上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $(0,0)$ 到 $(4,0)$ 的一段，求 $\int_L (x+3y)dx + (y^2-x)dy$.

2．设 Σ 是曲面 $z=2-x^2-y^2$， $1\leqslant z\leqslant 2$ 取上侧，求

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3．设 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围，求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$.

“高等数学 B（下）”期末试题 2 参考答案

一、1．收敛；2．收敛；3． $-\dfrac{1}{4}$；4． $\left\{(x,y)\mid y>x\geqslant 0,x^2+y^2<1\right\}$

5． $-\dfrac{1}{4}$；6．1；7． $\left(y+\dfrac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$；8． $\{3,-2,-6\}$.

二、1．D；2．A；3．B；4．A；5．A.

三、证明：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\varphi(u)}{1-x\varphi'(u)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{1-x\varphi'(u)}\left[2\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1-x\varphi'(u)},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{1-x\varphi'(u)}x\varphi''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=2\varphi(u)\varphi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

整理表达式得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^2(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\left[\frac{1}{1-x\varphi'(u)}\right]^2\left[2\varphi(u)\varphi'(u)+\frac{x\varphi''(u)}{1-x\varphi'(u)}\varphi^2(u)\right]$$

四、解：对 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=4\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 关于 x 求导得

$$\begin{cases} 4x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \\ 2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

代入点（1,1,1）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-1$，切向量为 $\boldsymbol{T}=\{1,-1,-1\}$.

切线方程为 $$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1},$$

法平面方程为 $$x-y-z+1=0.$$

五、解：设椭球和长方体在第一卦限的交点坐标为 (x,y,z). 则长方体的体积 $V=8xyz$，又满足 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda)=8xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$，则

$$\begin{cases} F_x=8yz+\dfrac{2x}{a^2}\lambda=0, \\ F_y=8xz+\dfrac{2y}{b^2}\lambda=0, \\ F_z=8xy+\dfrac{2z}{c^2}\lambda=0, \\ F_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0, \end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$ 为唯一驻点，由实际意义知此点为最值点.

所以体积最大值为 $V=\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

六、解：由比值或根值法求收敛半径为 1，则收敛区间 $(-1,1)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\left[\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right]''=x\left[\frac{1}{1-x}-1-x\right]''$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}.$$

七、1．解：补充 L^* 为沿 x 轴从 $(4,0)$ 到 $(0,0)$ 一段.则

$$\int_L (x+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L+L^*}(x+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y-\int_{L^*}(x+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y\ ,$$

其中$\oint_{L+L^*}(x+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y=-\iint\limits_D -4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi$，

$$\int_{L^*}(x+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y=-\int_4^0 x\mathrm{d}x=-8\ ,$$

故
$$\int_L (x+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y=8\pi+8\ .$$

2．解：补充面Σ^*：$\begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$取下侧，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-$$

$$\iint\limits_{\Sigma^*}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

其中

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma^*}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_1^{2-\rho^2}\rho\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}\ ,$$

$$\iint\limits_{\Sigma^*}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\cos^2\theta\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}.$$

故
$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}\ .$$

3．解：由对称性知

$$\iiint\limits_{\Omega}(2xy+2yz+2xz)\mathrm{d}v=0\ ,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{32\pi(2-\sqrt{2})}{5}.$$

“高等数学 B（下）”期末试题 3

一、填空题

1．无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 是________的.（收敛，发散）

2．设函数 $f(x)=\pi x+x^2$，$-\pi<x<\pi$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其中系数 $b_3=$________.

3．设矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=3$，$\boldsymbol{b}=2$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$，则 $|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=$________.

4．$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\alpha)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}},\alpha\neq 0$ 为________.

5．设 $\boldsymbol{u}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 则 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{u})=$________.

6．$f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin\pi y+(x-1)\arctan\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f_x'(1,1)=$________.

7．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=$________.

二、计算题

1．设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

2．求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程和法平面方程.

3．求 $I=\iint\limits_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D:x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0$.

4．计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}v$，其中 Ω 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

5．设 L 是 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x=y \end{cases}$ $(a>0)$，求 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}\,\mathrm{d}s$.

6．设 C 是上半圆周 $y=\sqrt{1-x^2}$ 从点 $(-1,0)$ 到点 $(1,0)$ 的有向曲线，则 $\int_C (y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$.

7．设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，求 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S$.

三、简答与综合题

1．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$ 的收敛区间与和函数.

2．已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并有 $f(1,1)=2$，（1）求 $z=f(x,y)$；（2）求 $z=f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\}$ 上的最大值和最小值.

3．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为 $z=\mathrm{e}^y,(0\leqslant y\leqslant 2)$ 绕 Oz 轴旋转一周所形成曲面的下侧.

4．设曲线积分 $\int xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0)=0$ 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

“高等数学 B（下）”期末试题 3 参考答案

一、1．收敛；2．$\dfrac{2}{3}\pi$；3．3；4．$\mathrm{e}^{\frac{1}{\alpha}}$；5．0；6．$\dfrac{\pi}{4}$；7．1.

二、1．解：由 $u=f(x,y,z)$ 知

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1+f_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f_3\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 两端对 x 求导得

$$y\mathrm{e}^{xy}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{xy}-y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-y\mathrm{e}^{xy}}{x(\mathrm{e}^{xy}-1)}.$$

$\mathrm{e}^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两端对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{x}=\frac{\sin(x-z)}{x-z}-\frac{\sin(x-z)}{x-z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\sin(x-z)}{x-z}-\mathrm{e}^{x}}{\frac{\sin(x-z)}{x-z}}.$$

于是
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1+f_2\frac{y-y\mathrm{e}^{xy}}{x(\mathrm{e}^{xy}-1)}+f_3\frac{\frac{\sin(x-z)}{x-z}-\mathrm{e}^{x}}{\frac{\sin(x-z)}{x-z}}.$$

2．解：等式两端对 x 求导得

$$\begin{cases}2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2x+2z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x-y}{y-z}.$$

而
$$\boldsymbol{T}\big|_{(1,-2,1)}=\{1,0,-1\},$$

于是切线方程为
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}.$$

法平面方程为 $(x-1)-(z-1)=0$ 即 $x-z=0$.

3．解：利用极坐标系有

$$\begin{aligned}I&=\iint_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\\&=-\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(1-\frac{2}{1+\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho^2\\&=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

4．解：由对称性知 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v=0$．选择球面坐标系得

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}.$$

5．解：由于曲线上点的坐标满足曲线方程，故

$$\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\mathrm{d}s=\int_L a\mathrm{d}s=a\cdot 2\pi a=2\pi a^2.$$

6．解：补充从点 $(1,0)$ 到点 $(-1,0)$ 的有向直线段，记为 L_1，则原积分

$$I=\oint_{C+L_1}(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y-\int_{L_1}(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}}[3y^2\mathrm{e}^x-(3y^2\mathrm{e}^x-2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_1}(y^3\mathrm{e}^x-2y)\mathrm{d}x+(3y^2\mathrm{e}^x-2)\mathrm{d}y$$

$$=-2\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ y\geqslant 0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0=-\pi.$$

7．解：由对称性和轮换对称性知

$$I=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\left(|x|+|y|+|z|\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

三、1．解：
$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+3}}{(n+1)(2n+3)}}{\dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}}\right|=\left|x^2\right|,$$

令 $\rho(x)<1$，得原级数收敛区间为 $(-1,1)$．若记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n},$$

$$S''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}.$$

于是
$$S'(x)=S'(0)+\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\ln(1-x)-\ln(1+x),$$

进而
$$S(x)=S(0)+\int_0^x[-\ln(1-x)-\ln(1+x)]\mathrm{d}x$$
$$=(1-x)\ln(1-x)-(1+x)\ln(1+x)+2x,\quad x\in(-1,1).$$

2．解：由已知得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$.

由 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$，可得 $z(x,y)=x^2+g(y)$，此时 $\frac{\partial z}{\partial y}=g'(y)=-2y$.

知 $g(y)=-y^2+C$，即 $z(x,y)=x^2-y^2+C$.

又 $f(1,1)=2$，有 $z(x,y)=x^2-y^2+2$.

在椭圆域内由
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2y=0,$$

得唯一一个驻点 $(0,0)$，且 $f(0,0)=2$；

在椭圆曲线上令
$$F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right),$$

则
$$\begin{cases}F_x=2x(1-\lambda)=0,\\ F_y=\dfrac{1}{2}y(\lambda-4)=0,\\ F_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$$

得
$$x=0,y=\pm2,\lambda=4;y=0,x=\pm1,\lambda=1.$$

且
$$f(0,\pm2)=-2,f(\pm1,0)=3.$$

故 $x=0,y=\pm2,$取得最小值；$x=\pm1,y=0$，取得最大值，$f(0,\pm2)=-2,f(\pm1,0)=3.$

3．解：补充曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant4,\\ z=\mathrm{e}^2,\end{cases}$取上侧，记其与 Σ 所围的区域为 Ω．则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ -\iint_{\Sigma}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint_{\Omega}(4z-2z+1-2z)\mathrm{d}v-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^4)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_1^{\mathrm{e}^2}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant(\ln z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ -4\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^4)$$

$$=-2\pi\mathrm{e}^2+4\pi\mathrm{e}^4-2\pi\,.$$

4．解：由积分与路径无关条件知 $2xy=y\varphi'(x)$，于是

$$\varphi(x)=x^2+c\,,$$

又 $\varphi(0)=0$，故 $\varphi(x)=x^2$.

则
$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\,.$$

“高等数学 B（下）”期末试题 4

一、填空题

1．直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 与直线 $L_2:\begin{cases}x+y+2=0\\ x+2z=0\end{cases}$ 的夹角是________.

2．设 $y=f(x)$ 是方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy-1=0$ 在 $(0,0)$ 点确定的单值可导隐函数，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$________.

3．函数 $f(x,y,z)=x^2+y^z$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿增加最快方向的方向导数为________.

4．函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 在点 $P(2,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z|_{(2,1)}=$ ________.

5．设 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 rot(grad u)=________.

6．设 D 是直线 $y=0,x=\pi,y=x$ 所围的闭区域，则 $\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

7．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛半径为________.

8．设周期函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0)\\ \mathrm{e}^x, & x\in[0,\pi)\end{cases}$，则它的傅里叶级

数在 $x=0$ 处收敛于________.

9．设 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域，则 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

10．已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 周长为 A，则 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s=$________.

二、设 $w=f(x+y+z,xyz)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$.

三、计算 $\int_L (x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$, 其中 L 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$.

四、设 Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2$, $1\leqslant z\leqslant 2$ ，取上侧，求

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3z+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

五、设 $P(x,y,z)$ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点，求点 $P(x,y,z)$ 到平面 $x+y-2z=2$ 的最短距离.

六、设 $f(u)\in C$, $f(0)=0$, $f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}F(t)$, 其中

$$F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

七、求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ 的收敛半径、收敛域及和函数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}$ 的值.

八、设数列 u_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=1$ ，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$ 收敛.

“高等数学 B（下）”期末试题 4 参考答案

一、1． $\dfrac{\pi}{4}$；2． -1；3． $\sqrt{5}$；4． $\mathrm{e}^2\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^2\mathrm{d}y$；5．$(0,0,0)$；

6．2；7． $\dfrac{1}{2}$；8． $\dfrac{1}{2}$；9． $\dfrac{1}{48}$；10． $12A$.

二、解：令 $u=x+y+z, v=xyz$ ，则

$$w=f(u,v),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot yz=f_1'(x+y+z,xyz)+yzf_2'(x+y+z,xyz),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x\partial z}=f_{11}''\cdot 1+f_{12}''\cdot xy+yf_2'+yz[f_{21}''\cdot 1+f_{22}''\cdot xy]$$

$$=f_{11}''+y(x+z)f_{12}''+xy^2zf_{22}''+yf_2''.$$

三、解：使用格林公式，添加辅助线段 $\overline{AO}$ ，如图 1 所示，它与 L 所围区域为 D，则

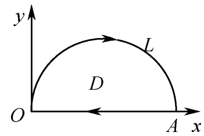


图 1

$$原式=\oint_{L\cup\overline{AO}}(x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}}(x^2+3y)\mathrm{d}x+(y^2-x)\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\mathrm{d}x=8\pi+\frac{64}{3}.$$

四、解：作取下侧的辅助面

$$\Sigma_1: z=1,(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 1.$$

利用高斯公式得

$$I=\oiint_{\Sigma\cup\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

五、解：点 $P(x,y,z)$到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为 $d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$.

问题化为在条件 $x^2+y^2-z=0$ 下，求 $(x+y-2z-2)^2$ 的最小值.

作拉氏函数 $F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$.

由方程组

$$\begin{cases}F_x'=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0,\\ F_y'=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0,\\ F_z'=2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0,\\ z=x^2+y^2,\end{cases}$$

解得唯一驻点　$x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{8}$.

由实际意义最小值存在，得 $d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}$.

六、解：在球坐标系下

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r)r^2\,\mathrm{d}r\,,$$

$$F(0)=0.$$

利用洛必达法则与导数定义，得

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)\,.$$

七、解：易求出收敛半径 $R=1$， $x=\pm1$ 时级数发散，收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},x\in(-1,1)\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}=\frac{2}{9}.$$

八、证明：记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(u_k+u_{k+1})=u_1+(-1)^{n+1}u_{n+1}\,.$$

由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=1$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=u_1$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(u_n+u_{n+1})$ 收敛，其和为 u_1.

反侵权盗版声明